



Photo : Samuel Schwyn

Orientation 3D par multi-GNSS

Samuel Schwyn

Juillet 2022

Domaine Ingénierie et Architecture

Master conjoint UNIGE-HES-SO en développement territorial

Orientation Ingénierie Géomatique

Directeur : Prof. Dr. Sébastien Guillaume

Expert : Dr. Daniel Willi

Mémoire n° : 1018



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

Hes-so
Haute Ecole Spécialisée
de Suisse occidentale

Résumé

Différents systèmes et applications, utilisant une plateforme statique ou mobile, tels que les systèmes d'acquisition 3D, la réalité augmentée ou encore la navigation nécessitent non-seulement la détermination de leur positionnement mais également de leur orientation en trois dimensions dans l'espace.

Ces systèmes combinent souvent des mesures inertielles (accéléromètres, gyroscopes ou encore magnétomètres) avec des méthodes de cartographie rapide telles que le SLAM (Simultaneous Localization And Mapping). Si ces méthodes fonctionnent dans tous les types de milieux, les mesures inertielles déterminent uniquement une orientation *relative* dont la qualité est affectée par la dérive temporelle des systèmes utilisés.

Le grand avantage des mesures GNSS par rapport aux autres capteurs est de pouvoir déterminer une orientation *absolue* dans l'espace. Toutefois, la plupart des programmes disponibles actuellement sur le marché calculent une orientation 3D de façon indirecte en passant par la détermination de lignes de base cinématiques et n'utilisent pas directement les observations GNSS brutes.

L'objectif de ce projet est de développer un programme pour calculer l'attitude (ou orientation 3D) d'une plateforme sur laquelle sont fixées au moins 3 antennes GNSS, en exploitant directement les propriétés des mesures GNSS enregistrées par les récepteurs.

Le travail se décompose en trois parties principales : le développement d'un simulateur de trajectoire, la simulation d'observations GNSS au format RINEX et enfin le développement d'un modèle de détermination des angles d'attitude par les moindres carrés.

L'avantage d'un simulateur d'observations GNSS est de pouvoir maîtriser l'ensemble des paramètres qui influencent la mesure et de générer des observations GNSS avec la possibilité de simuler du bruit de mesure ou des sauts de cycle. Pour ce travail, seule la constellation GPS a été utilisée afin de ne pas complexifier le problème, même si quelques éléments concernant les systèmes Galileo et GLONASS sont brièvement expliqués.

Le calcul des angles d'attitude se réalise en post-traitement, via la méthode des moindres carrés selon le modèle de Gauss-Markov avec contraintes, en effectuant un calcul en un seul bloc et non pas une estimation séquentielle. Même si des angles en degrés sont fournis à la fin du calcul, l'ajustement se base sur l'utilisation de quaternions unitaires qui permettent de décrire une matrice de rotation de manière plus élégante.

Afin de valider la méthode de calcul implémentée, des tests ont été réalisés, d'abord avec des données simulées dont on connaît tous les paramètres, puis avec des observations réelles. Les principaux résultats de ces tests sont présentés, afin de déterminer notamment la précision des angles calculés. Une comparaison avec des angles calculés par des moyens indépendants (centrale inertielle, lignes de base cinématiques) est également présentée.

A la fin du rapport, quelques pistes de développement sont décrites sur la base des principaux résultats obtenus dans ce travail et mettent en lumière les limites et les points critiques de ce projet. Le programme développé n'a pas pour but d'être entièrement fonctionnel mais constitue plutôt une base en vue de pouvoir approfondir les recherches par la suite.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont accompagnées durant ce travail, en particulier :

- **Prof. Dr. Sébastien Guillaume** pour la proposition du sujet et l'encadrement ainsi que pour sa disponibilité pour répondre aux questions.
- **Dr. Daniel Willi** pour sa présence comme expert et ses bons conseils lors de la présentation intermédiaire.
- **M. Samuel Caillet-Bois** pour son soutien, ses conseils et sa bonne humeur tout au long de nos années d'études depuis le début du bachelor jusqu'à la fin du master.
- **M. Christophe Stucki**, collaborateur technique à la HEIG-VD, pour la préparation des trous dans la plateforme de test et ses conseils pratiques pour la mise en place de cette dernière.
- Mes camarades de classe avec lesquels j'ai pu partager de nombreuses expériences durant les deux années de master.
- Mes parents, mes frères et ma soeur, qui se sont investis pour moi et sur qui j'ai toujours pu compter, dans les moments faciles comme dans les moments plus difficiles de cette formation et de ce travail de master.

Table des matières

Table des figures	7
Liste des tableaux	9
I Introduction	12
1 Contexte	12
2 Cahier des charges	12
3 Démarche de travail	12
4 Logiciels utilisés	13
4.1 Rinex	13
II Éléments théoriques	14
5 Généralités	14
5.1 Secteurs et constellations	14
5.2 Signaux GNSS	15
5.3 Types de mesures	16
5.3.1 Pseudo-distance sur le code	16
5.3.2 Effet Sagnac	17
5.3.3 Mesure de phase sur l'onde porteuse	18
5.3.4 Calcul de la longueur d'onde	18
5.3.5 Doppler	19
5.4 Méthodes de positionnement	20
6 Erreurs	21
6.1 Erreurs d'horloge	21
6.1.1 Erreur d'horloge du satellite	21
6.1.2 Erreur d'horloge du récepteur	21
6.2 Erreurs d'orbite	22
6.3 Erreurs atmosphériques	22
6.3.1 Erreur due à la ionosphère (Klobuchar)	22
6.3.2 Erreur due à la ionosphère (NeQuick)	24
6.3.3 Erreur due à la troposphère (Saastamoinen)	25
6.4 Erreurs non prises en compte	26
7 Calcul des orbites	27
7.1 Calcul par éléments de Kepler	27
7.2 Calcul à partir des vecteurs de coordonnées, de vitesse et d'accélération (GLONASS)	31
8 Lignes de base	32
8.1 Zéro-différence	32
8.2 Simple-différence	32
8.3 Double-différence	32
8.4 Triple-différence	33
8.4.1 Mesure différentielle sur le code	33
9 Définitions, conventions et relations entre les systèmes	34
9.1 Système TRS (WGS84)	34
9.2 Système topo	35
9.3 Système body	36
9.4 Système IMU	37
9.5 Matrice de rotation (attitude)	37
9.5.1 Paramétrisation selon 3 angles	37
9.5.2 Paramétrisation selon un quaternion unitaire	38
9.6 Transformations entre systèmes	39

9.6.1	Transformation body \rightarrow topo	39
9.6.2	Transformation topo \rightarrow body	39
9.6.3	Transformation topo \rightarrow TRS	40
9.6.4	Transformation TRS \rightarrow topo	40
9.6.5	Transformation body \rightarrow TRS	40
9.6.6	Transformation TRS \rightarrow body	40
9.6.7	Transformation WGS84 ellipsoïdales $(\lambda, \varphi, h) \rightarrow$ WGS84 cartésiennes $(\mathbf{x}^{\text{TRS}}, \mathbf{y}^{\text{TRS}}, \mathbf{z}^{\text{TRS}})$	40
9.6.8	Transformation WGS84 cartésiennes $(x,y,z) \rightarrow$ WGS84 ellipsoïdales (λ, φ, h)	41
9.7	Exemple numérique	42
9.8	Système temporel	44
9.8.1	Transformation date calendaire en date julienne modifiée	45
9.8.2	Transformation date julienne modifiée en date calendaire	47
10	Détermination d'attitude par GNSS	49
10.1	Paramétrisation de l'attitude	49
10.2	Stratégies de détermination de l'attitude	50
10.2.1	Méthode TRIAD	50
10.2.2	Méthode FOAM	51
10.2.3	Calcul par moving-baseline et détermination des angles d'attitude par Helmert 3D	51
10.2.4	Estimation directe de l'attitude à partir des observations de double-différences	51
11	Estimation de Gauss-Markov avec contraintes	53
11.1	Positionnement simple sur le code (Single Point Positioning SPP)	54
11.1.1	Une seule époque	54
11.1.2	Point statique, plusieurs époques	56
11.1.3	Point cinématique, plusieurs époques	56
11.2	Positionnement différentiel sur le code	57
11.2.1	Une seule époque	57
11.2.2	Point statique, plusieurs époques	58
11.2.3	Point cinématique, plusieurs époques	58
11.3	Positionnement différentiel sur la phase	59
11.3.1	Une seule époque	59
11.3.2	Point statique, plusieurs époques	59
11.3.3	Point cinématique, plusieurs époques	60
11.4	Attitude différentielle sur la phase	61
11.4.1	Calcul surabondance	64
12	Précision	65
12.1	Précision de l'attitude	65
12.2	Précision d'une observation de double-différence	66
13	Résolution des ambiguïtés	67
13.1	Détermination des ambiguïtés de double-différence	67
13.2	Recherche de la meilleure solution	67
14	Sauts de cycle	67
III	Implémentation du programme	69
15	Structure du programme	69
16	Simulation de la trajectoire	69
16.1	Interface de saisie de la trajectoire	70
16.2	Transformation des coordonnées ellipsoïdales en coordonnées cartésiennes	70
16.3	Lissage de la trajectoire	70
16.4	Modèle cinématique	71
16.5	Position des récepteurs selon attitude de la plateforme	72
16.6	Simulation des observations GNSS	73

17 Stratégie de calcul	75
17.1 Import des éphémérides	75
17.2 Import des données des récepteurs	75
17.3 Calcul sur le code	75
17.4 Pré-traitements	75
17.4.1 Préparation des observations de double-différences	75
17.4.2 Détection des sauts de cycles	76
17.5 Détermination des inconnues approchées	76
17.5.1 Initialisation des ambiguïtés	76
17.5.2 Détermination des quaternions approchés	77
17.5.3 Angles approchés constants	77
17.5.4 Angles approchés variables	77
17.6 Estimation avec ambiguïtés flottantes	78
17.7 Résolution des ambiguïtés avec LAMBDA	78
17.8 Estimation avec ambiguïtés fixées	78

IV Tests et expérimentations pratiques 79

18 Données simulées	79
18.1 Simulation de la trajectoire	79
18.2 Simulation d'observations GNSS au format RINEX	84
18.2.1 Positionnement sur le code et comparaison avec RTKLIB	84
18.3 Validation du calcul d'attitude	86
18.3.1 Angle de 0° autour de chaque axe	86
18.3.2 Angle de 0° autour de chaque axe, avec du bruit	90
18.3.3 Angles constants $y=50^\circ$, $p=10^\circ$, $r=5^\circ$, avec bruit	93
18.3.4 Angles tangents, avec bruit	99
18.3.5 Angles tangents, avec bruit et saut de cycle	104
18.3.6 Conclusion - Données simulées	109

19 Données réelles	110
19.1 Détermination du système de la plateforme (body)	110
19.2 Configuration des tests et préparation des données	114
19.2.1 Export des observations RINEX	114
19.2.2 Centrale inertielle	114
19.3 Test 1 - Plateforme sur un trépied	115
19.3.1 Détermination des angles d'attitude	117
19.3.2 Comparaison des résultats	120
19.4 Test 2 - Plateforme en mouvement	124
19.4.1 Détermination des angles d'attitude	126
19.4.2 Comparaison des résultats	130

20 Conclusion et perspectives 134

20.1 Améliorations possibles	134
--	-----

Bibliography 136

Table des figures

1	Position du satellite i et du récepteur A à l'émission et à la réception du signal (image tirée de (Guillaume, 2022a))	16
2	Retard ionosphérique selon le modèle de Klobuchar	24
3	Retard troposphérique selon le modèle de Saastamoinen	26
4	Éléments d'orbites, By Lasunncty at the English Wikipedia, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8971052	28
5	Systèmes utilisés	34
6	Angle d'attitude yaw entre le système body et le système topo	37
7	Principe de la détermination d'attitude (inspiré de (Willi, 2019))	50
8	Triple-différences décorréées avec saut de cycle	68
9	Triple-différences décorréées sans saut de cycle	68

10	Interface de saisie des points développée en python	70
11	Trajectoire	79
12	Modèle cinématique de la plateforme	80
13	Configuration de la plateforme pour les simulations	82
14	Trajectoire simulée (angles tangents à la trajectoire)	83
15	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	87
16	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	88
17	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	88
18	Résidus	89
19	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	91
20	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	92
21	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	92
22	Résidus	93
23	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	95
24	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	95
25	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	96
26	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	96
27	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	97
28	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	97
29	Résidus	98
30	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	100
31	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	100
32	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	101
33	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	101
34	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	102
35	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	102
36	Résidus	103
37	Triple-différences avec saut de cycle (satellites G01-G08, antennes 0-1)	104
38	Triple-différences sans saut de cycle (satellites G01-G08, antennes 0-1)	105
39	Triple-différences avec saut de cycle (satellites G01-G10, antennes 0-2)	105
40	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	106
41	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	106
42	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	107
43	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	107
44	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	108
45	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	108
46	Résidus	109
47	Plateforme réelle	110
48	Test avec la plateforme fixée sur un trépied et tournant sur elle-même	115
49	Trajectoire d'une antenne de la plateforme	115
50	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	117
51	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	118
52	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	118
53	Résidus	119
54	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	120
55	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	121
56	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	121
57	Différences GNSS - MBL	122
58	Différences GNSS - IMU	122
59	Test avec la plateforme fixée sur une voiture	124
60	Trajectoire plateforme (orthophoto)	124
61	Trajectoire plateforme (calculée par RTKLIB)	125
62	Détection des sauts de cycle à partir des triple-différences (G31-G05)	126
63	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	127
64	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	128
65	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	128
66	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	129
67	Résidus	129
68	Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)	130
69	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	131
70	Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)	131

71	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	132
72	Attitude - angle roll (autour de l'axe x)	132
73	Différences GNSS - IMU	133

Liste des tableaux

1	Logiciels utilisés	13
2	Systèmes GNSS	15
3	Signaux GNSS	15
4	Méthodes de positionnement en post-traitement	20
5	Méthodes de positionnement en temps réel	20
6	Éléments de Kepler	27
7	Ephémérides GLONASS	31
8	Caractéristiques du calcul des différences	33
9	Systèmes de coordonnées utilisés	34
10	Paramètres de calcul	86
11	Résultats du calcul	87
12	Paramètres de calcul	90
13	Résultats du calcul	91
14	Paramètres de calcul	93
14	Paramètres de calcul	94
15	Résultats calcul	94
16	Paramètres de calcul	99
17	Résultats calcul	99
18	Paramètres de calcul	104
19	Sauts de cycle simulés	104
20	Résultats calcul	105
21	Caractéristiques des capteurs utilisés	114
22	Paramètres de calcul	116
23	Résultats calcul	117
24	Paramètres de calcul	125
25	Paramètres de calcul	126
26	Résultats calcul	127

Abréviations

GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
HEIG-VD	Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud
IGS	International GNSS Service
IMU	Inertial Measurement Unit (centrale inertielle)
LAMBDA	Least Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment
MJD	Modified Julian Date
PCO	Phase Center Offset
PCV	Phase Center Variations
PPP	Precise Point Positioning
RINEX	Receiver Independent Exchange Format
RTK	Real Time Kinematic
SLAM	Simultaneous Localization And Mapping
SBAS	Satellite-Based Augmentation System
SPP	Single Point Positioning
TAI	Temps Atomique International
TEC	Total Electron Content
TRS	Terrestrial Reference System
UTC	Temps Universel Coordonné
WGS84	World Geodetic System 1984
YAML	Yet Another Markup Language

Constantes

Les constantes utilisées dans ce projet sont tirées de (Guillaume, 2021).

c	Vitesse de la lumière dans le vide : $2.99792458 \cdot 10^8$ [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]
ω_e	Vitesse angulaire de rotation de la Terre : $7.2921151467 \cdot 10^{-5}$ [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]
μ_e	Constante gravitationnelle de la Terre : $3.986005 \cdot 10^{14}$ [$\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$]
a_{Bessel}	Demi-grand axe de l'ellipsoïde de Bessel : 6377397.155 [m]
f_{Bessel}	Applatissement de l'ellipsoïde de Bessel : 1/299.1528128 [-]
a_{GRS80}	Demi-grand axe de l'ellipsoïde GRS80 : 6378137.000 [m]
f_{GRS80}	Applatissement de l'ellipsoïde GRS80 : 1/298.257222101 [-]

Avant-propos

Ce travail de master constitue la dernière étape de la formation du Master conjoint HES-SO - UNIGE en Développement Territorial (MDT), orientation Ingénierie Géomatique. Il permet de mettre en pratique les connaissances acquises durant les trois semestres de cours au travers d'un sujet de recherche.

D'une durée de 750 à 900 heures, ce travail s'est déroulé entre les mois de février et de juillet 2022. L'essentiel des tâches a pu être effectué à domicile, avec toutefois une séance hebdomadaire en présentiel pour faire le point sur l'état d'avancement du projet.

Le thème de ce travail - **Orientation 3D par multi-GNSS** - a été proposé par Prof. Dr. Sébastien Guillaume, professeur en géodésie, méthodes d'estimation et navigation à la Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud (HEIG-VD) et responsable de plusieurs modules de cours du master.

Dr. Daniel Willi, chef du processus *Mensuration géodésique nationale* chez swisstopo et auteur de la thèse *GNSS receiver synchronisation and antenna calibration* a été l'expert pour ce travail.

Après quelques éléments introductifs et une brève présentation des généralités concernant le GNSS, le lecteur est guidé pas à pas à travers le projet grâce aux divers concepts et formules qui, mis en lien les uns avec les autres, forment une image globale de la problématique.

Le travail de master ne se limite pas au présent rapport mais est également constitué d'un ensemble de scripts python développés dans le but d'atteindre les divers objectifs de ce projet.

Première partie

Introduction

1 Contexte

Comme son nom l'indique, le travail de master présenté dans ce rapport a pour but de développer un logiciel pour déterminer l'orientation 3D d'une plateforme en utilisant au moins 3 récepteurs GNSS fixés sur cette dernière. Différents systèmes et applications, utilisant une plateforme statique ou mobile, tels que les systèmes d'acquisition 3D, la réalité augmentée ou encore la navigation nécessitent non-seulement la détermination de leur positionnement mais également de leur orientation en trois dimensions.

Ces systèmes combinent souvent des mesures inertielles (accéléromètres, gyroscopes ou encore magnétomètres) avec des méthodes de cartographie rapide telles que le SLAM (Simultaneous Localization And Mapping). Si ces méthodes fonctionnent dans tous les types de milieux, les mesures inertielles déterminent uniquement une orientation *relative* dont la qualité est affectée par la dérive temporelle des systèmes utilisés.

Le grand avantage des mesures GNSS par rapport aux autres capteurs est de pouvoir déterminer une orientation absolue dans l'espace. Toutefois, la plupart des programmes disponibles actuellement sur le marché calculent une orientation 3D de façon indirecte en passant par la détermination de lignes de base cinématiques. Bien que cette méthode soit directement compatible avec les algorithmes standards du GNSS différentiel, elle n'utilise pourtant pas entièrement les propriétés géométriques qu'offrent les mesures GNSS pour l'estimation de l'orientation 3D.

2 Cahier des charges

Avant le début de ce travail de master, un cahier des charges a été établi afin de guider et d'orienter le déroulement du projet. Ce n'est pas un cadre complètement rigide, ce qui laisse la liberté d'explorer certains aspects qui peuvent se présenter au cours du travail.

Les principaux objectifs fixés par le cahier des charges sont les suivants :

- Recherche et étude de la littérature des systèmes de détermination d'attitude par GNSS.
- Réalisation d'un simulateur d'observations de pseudo-distances et de mesures de phase GNSS pour une plateforme sur laquelle plusieurs antennes GNSS sont fixées. Le simulateur devra pouvoir générer des fichiers d'observations RINEX 3.02.
- Etude des modèles mathématiques pour la détermination directe de l'orientation 3D par multi-GNSS.
- Développement des différentes classes, modules et bibliothèques.
- Tests du logiciel avec les données simulées et réelles.

3 Démarche de travail

Les points mentionnés ci-dessus sont détaillés dans les différents chapitres de ce rapport. Au début du projet, un travail de recherche théorique a été nécessaire pour se familiariser avec le GNSS qui n'avait été que brièvement abordé durant les cours. Une importance particulière a été mise sur les différents systèmes de référence et les conventions ainsi que les équations et autres formules utilisées dans ce travail afin de ne pas laisser de doute au lecteur. Le projet se décompose en trois parties principales : le développement d'un simulateur de trajectoire, la simulation d'observations GNSS au format RINEX et enfin le développement d'un modèle de détermination des angles d'attitude par les moindres carrés. La plus grande partie du travail a été le développement des différents scripts nécessaires au bon fonctionnement du programme.

4 Logiciels utilisés

Pour mener à bien ce travail, plusieurs logiciels ont été utilisés pour les différentes phases du projet et sont résumés dans le tableau 1 ci-dessous.

TABLE 1: Logiciels utilisés

Logiciel	Description	OpenSource	Lien
Spyder (Python 3.9)	Logiciel de programmation	oui	Lien
RTKLIB	Logiciel de post-traitement GNSS	oui	Lien
GrafNav	Logiciel de post-traitement GNSS	non	Lien
Leica Infinity	Export des observations brutes GNSS en RINEX	non	Lien
MT Manager 2021.4	Gestion de la centrale inertielle	oui	Lien

La plus grande partie du travail de programmation a été réalisée en python (Spyder IDE, 2021). Ainsi, tous les scripts développés dans le cadre de ce projet ont été écrits dans ce langage.

RTKLIB a permis d'effectuer des calculs de contrôle pour valider les observations GNSS simulées. Il s'agit d'un programme open source de post-traitements GNSS, librement accessible (Takasu, 2013).

Pour les tests avec des données réelles, les logiciels décrits ci-dessous ont été utilisés.

Le logiciel Leica Infinity a été utilisé uniquement pour l'export des données GNSS des récepteurs au format RINEX. C'est un logiciel propriétaire de Leica (Leica Geosystems AG - Part of Hexagon, 2022).

Pour permettre la comparaison des résultats, un calcul indépendant de lignes de bases cinématiques a été effectué grâce au logiciel de post-traitement GrafNav (Hexagon, 2022). Ces calculs ont été réalisés par Prof. Dr. Sébastien Guillaume qui possède une licence de ce programme.

Enfin, pour gérer la centrale inertielle et en exporter les données, le logiciel MT Manager a été utilisé (xsens, 2022).

4.1 Rinex

RINEX (Receiver Independent Exchange Format) est un format d'échange de données GNSS et permet de stocker différentes informations fournies par les satellites. Les données brutes des observations sont stockées dans un fichier d'observations. Le fichier de navigation contient les éphémérides de l'ensemble des satellites de la constellation.

La documentation technique du format RINEX 3.02 (IGS, 2013) contient toutes les informations nécessaires à la bonne compréhension de ces fichiers. On y trouve la description détaillée des informations contenues dans les fichiers d'observations et les fichiers de navigation. Ce document a été largement étudié afin de pouvoir générer des fichiers RINEX conformes.

Deuxième partie

Éléments théoriques

Les éléments théoriques présentés dans ce rapport sont largement inspirés des cours de Prof. Dr. Sébastien Guillaume (Guillaume, 2021) et (Guillaume, 2022a) et du travail de master de M. Herrero (Herrero Mártil, 2022).

5 Généralités

Le mot GNSS (Global Navigation Satellite System) est le terme générique pour désigner un système global de navigation par satellites. Un système GNSS a plusieurs avantages par rapport à une méthode de mesure purement terrestre (p. ex. tachéométrie). Comme son nom l'indique, un système GNSS est un système global, disponible quasiment partout sur la Terre (sauf éventuellement au-dessus des pôles) et à n'importe quel moment du jour ou de la nuit. Ce système ne dépend pas de la météo, même si certaines corrections liées aux couches de l'atmosphère sont prises en compte. Le présent chapitre décrit brièvement quelques éléments théoriques nécessaires à la bonne compréhension du GNSS. Dans le paragraphe 5.1, les trois secteurs formant un système GNSS sont expliqués de même que les différentes constellations de satellites utilisées aujourd'hui. Les signaux et les fréquences utilisées sont présentées dans le paragraphe 5.2. Les types d'observations sont décrits rapidement dans le paragraphe 5.3.

5.1 Secteurs et constellations

Un système GNSS se compose toujours de trois parties :

- Le secteur **spatial** : il s'agit des satellites proprement dits, appelés également *Space Vehicule* (SV), qui gravitent autour de la Terre en suivant des orbites. Pour le calcul des orbites, le lecteur se référera au chapitre 7.
- Le secteur de **contrôle** : constitué de centres de contrôle et de centres de calcul, ce secteur s'occupe de la gestion des satellites et s'assure du bon fonctionnement du système. Il calcule notamment les erreurs d'horloge des satellites et les éphémérides que l'on retrouve dans le fichier de navigation. Si un satellite dévie de son orbite, le centre de contrôle principal lui envoie des informations pour qu'il puisse effectuer une manœuvre de correction de sa trajectoire.
- Le secteur des **utilisateurs** : chaque personne qui utilise un capteur GNSS est un utilisateur du système. Toutefois, en fonction du statut (civil ou militaire) et du type d'antenne, l'exploitation de ces données n'est pas la même. L'utilisateur n'a qu'un rôle passif, puisqu'il ne peut pas interagir directement avec le satellite de façon active mais reçoit uniquement des informations que l'on retrouve dans le fichier d'observations.

Au-dessus de nos latitudes, il existe actuellement quatre constellations principales de GNSS ayant chacune ses propres caractéristiques, notamment le rayon et l'inclinaison de l'orbite, le nombre de satellites utilisés ainsi que les fréquences d'émission. Ces caractéristiques sont résumées dans le tableau 2.

- **GPS** : c'est le premier système à avoir été mis en service par l'armée américaine avec un lancement du premier satellite en 1978 et pleinement opérationnel depuis 1995 pour la société civile.
- **GLONASS** : le système GLONASS est un système militaire russe, développé à la fin de la Guerre froide et mis en fonction en 1996.
- **Galileo** : il s'agit d'un système civil européen, fonctionnel depuis 2017. Plusieurs satellites sont encore en cours de lancement, mais le système est déjà opérationnel.
- **Beidou** : ce système militaire chinois a été pensé au départ comme un système régional, mais s'est développé entre les années 2010 et 2020 pour devenir un système global, permettant à la Chine de devenir indépendante des Etats-Unis.

On peut également citer d'autres systèmes régionaux, qui ne couvrent qu'une partie du globe terrestre, principalement en Asie :

- **QZSS** : système japonais
- **IRNSS** : système indien

D'autres systèmes, appelés systèmes d'augmentation basés sur des satellites (SBAS pour Satellite-Based Augmentation System) ont été développés et permettent d'améliorer les performances des systèmes GNSS grâce à l'utilisation de satellites géostationnaires. Ces systèmes permettent notamment d'estimer certaines erreurs comme les erreurs d'horloge des satellites, d'envoyer certaines corrections aux récepteurs ou encore de surveiller l'intégrité des données GNSS. Grâce aux techniques de GNSS différentiel basées le calcul de lignes de base par

rapport à des points fixes dont les coordonnées sont connues (p. ex. positionnement cinématique en temps réel (RTK)), il est possible d'améliorer considérablement la précision du positionnement par satellites (voir chapitre 5.4).

TABLE 2: Systèmes GNSS

Système	Pays	Nombre de satellites	Rayon orbite	Inclinaison par rapport à l'équateur
GPS	Etats-Unis	31	26600 km	55°
GLONASS	Russie	24	25500 km	65°
Galileo	Europe	30	30000 km	56°
Beidou	Chine	42	22000 km	55°

Le travail présenté dans ce rapport est basé essentiellement sur le système GPS, même si quelques informations sur Galileo et GLONASS sont brièvement expliquées dans différents chapitres de ce rapport.

5.2 Signaux GNSS

Chaque satellite de chaque constellation émet des signaux sur plusieurs fréquences. Si le récepteur permet de recevoir plusieurs fréquences, il est possible de combiner plusieurs signaux pour notamment atténuer les erreurs atmosphériques qui ont une influence différente selon la fréquence (p. ex. combinaison des signaux GPS L1 et L2 pour construire un signal L3 libre de l'erreur ionosphérique). Toutefois, dans ce projet, tous les calculs sont réalisés en utilisant uniquement le signal L1 du système GPS.

Comme le montre le tableau 3, chaque signal d'une constellation est émis sur une fréquence propre. Il est intéressant de souligner que le système GLONASS utilise des fréquences différentes en fonction du numéro de fréquence (k) attribué au satellite. Les valeurs décrites ci-dessous sont issues de la documentation du format RINEX 3.20 (IGS, 2013).

TABLE 3: Signaux GNSS

Système	Signal	Fréquence
GPS	L1	1575.42 MHz
	L2	1227.60 MHz
	L5	1176.45 MHz
Galileo	E1	1575.42 MHz
	E5a	1176.45 MHz
	E5b	1207.14 MHz
	E5	1191.795 MHz
	E6	1278.75 MHz
GLONASS	G1	$1602 + \frac{9}{16}k$ MHz
	G2	$1246 + \frac{7}{16}k$ MHz

Chaque signal est composé de plusieurs informations :

- **Onde porteuse** : Pour chaque fréquence d'émission du satellite, une onde sinusoïdale se propage du satellite au récepteur et sert de support pour transporter le code ainsi que le message de navigation. Une mesure de phase utilise directement l'onde porteuse brute comme observation.
- **Code** : Le code (p. ex. code C/A (pour Clear Access ou Coarse Acquisition) du système GPS) est modulé sur l'onde porteuse et permet de déterminer le temps de vol du satellite jusqu'au récepteur, ce qui permet d'en déduire la pseudo-distance qui les sépare.
- **Message de navigation** : Le message de navigation contient des informations sur l'état du satellite, les erreurs d'horloge de même que les éphémérides sous la forme d'éléments de Kepler (pour GPS et Galileo) ou de positions, vitesses et accélérations des satellites (pour GLONASS). Ces données permettent de calculer la position du satellite dans l'espace. Le message de navigation est actualisé toutes les 15 minutes.

Il s'agit des informations principales destinées à l'usage civil. En effet, d'autres informations peuvent être modulées sur la phase, mais sont réservées à l'usage militaire (notamment le code P pour le système GPS). Les informations décrites ci-dessus sont consignées dans des fichiers RINEX que l'on peut exporter du récepteur GNSS une fois les mesures effectuées.

5.3 Types de mesures

Ce paragraphe présente les 3 types d'observations que l'on retrouve dans un fichier d'observations RINEX, que sont la pseudo-distance sur le code, la mesure de phase sur l'onde porteuse et la mesure Doppler.

5.3.1 Pseudo-distance sur le code

La donnée de base fournie par un système GNSS est le temps de vol du signal entre le moment de l'émission depuis le satellite et le moment de la réception par le récepteur. Pour trouver la valeur du temps de vol, l'antenne GNSS compare le signal reçu avec le même signal qu'elle génère elle-même. En effet, chaque récepteur connaît le modèle de la forme du signal de chaque satellite. En comparant le signal reçu et le signal simulé, le récepteur peut en déduire la valeur du temps de vol qui correspond au décalage qui a été nécessaire d'appliquer au signal simulé pour le faire correspondre au signal reçu. Pour trouver la pseudo-distance, il suffit de multiplier le décalage temporel par la vitesse de la lumière.

La pseudo-distance est l'observation déduite du code, mais ne correspond pas directement à la distance géométrique entre le satellite et le récepteur (d'où le terme de *pseudo*-distance) puisqu'elle est entachée d'une série d'erreurs qui affectent la mesure. Il est important de remarquer que la distance géométrique est la distance entre le satellite au temps de l'émission et le récepteur au temps de la réception et non pas une distance instantanée, comme on peut le voir sur la figure 1.

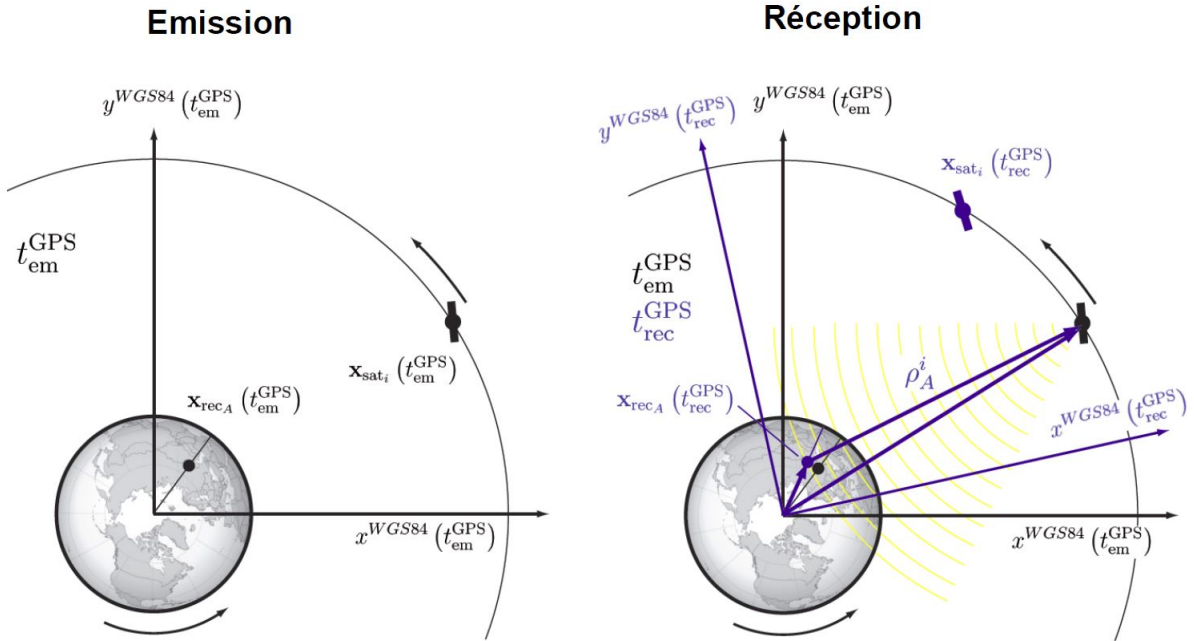


FIGURE 1 – Position du satellite i et du récepteur A à l'émission et à la réception du signal (image tirée de (Guillaume, 2022a))

L'équation d'observation d'une pseudo-distance est la suivante :

$$P_A^i + \hat{v}_{P_A^i} = \rho_A^i + c \cdot \hat{\delta}t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (5.1)$$

Ou de façon plus explicite :

$$P_A^i + \hat{v}_{P_A^i} = |\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_A| + c \cdot \hat{\delta}t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (5.2)$$

Avec :

- P_A^i Observation de pseudo-distance entre le récepteur A et le satellite i [m]
- $\hat{v}_{P_A^i}$ Résidu sur l'observation de pseudo-distance [m]

ρ_A^i	Distance géométrique entre le satellite i au temps de l'émission et le récepteur A au temps de la réception [m]
\mathbf{x}^i	Position du satellite i au moment de l'émission du signal [m]
$\hat{\mathbf{x}}_A$	Position du récepteur A au moment de la réception du signal [m]
$\hat{\delta}t_{rec}^{recA}$	Erreur d'horloge du récepteur [s]
$\delta t_{em}^{sat_i}$	Erreur d'horloge du satellite [s]
$\delta\rho_{A,trop}^i$	Erreur due au retard troposphérique [m]
$\delta\rho_{A,iono}^i$	Erreur due au retard ionosphérique [m]

La distance géométrique entre le satellite i et le récepteur A est donnée par l'équation suivante :

$$\rho_A^i = |\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_A| = |\mathbf{x}^i(t_{em}^i - \tau_A^i) - \hat{\mathbf{x}}_A(t_{rec}^A)| = |\mathbf{x}^i(t_{em}^i) - \hat{\mathbf{x}}_A(t_{rec}^A)| = |\mathbf{R}_e(\tau_A^i) \cdot \mathbf{x}_{Sagnac}^i(t_{em}^i) - \hat{\mathbf{x}}_A(t_{rec}^A)| \quad (5.3)$$

Avec :

ρ_A^i	Distance géométrique entre le satellite i au temps de l'émission et le récepteur A au temps de la réception [m]
\mathbf{x}^i	Position du satellite au temps de l'émission, non-corrigée de l'effet de rotation de la Terre (effet Sagnac)
$\hat{\mathbf{x}}_A$	Position du récepteur A au moment de la réception du signal [m]
\mathbf{R}_e	Matrice de rotation due à la rotation de la Terre (effet Sagnac)
\mathbf{x}_{Sagnac}^i	Position du satellite au temps de l'émission, non-corrigée de l'effet de rotation de la Terre (effet Sagnac)
τ_A^i	Temps de vol du signal [s]
t_{em}^i	Temps à l'émission du signal par le satellite i [s]
t_{rec}^A	Temps à la réception du signal par le récepteur A [s]

5.3.2 Effet Sagnac

L'effet Sagnac est décrit dans l'ouvrage de référence (Teunissen and Montenbruck, 2017) et également dans (Guillaume, 2022a). Puisque la Terre tourne pendant la propagation du signal, il est important de tenir compte des effets que cela induit sur le signal. En effet, pendant le temps de vol du signal GNSS, la Terre a tourné d'un certain angle α , calculé comme suit :

$$\alpha = \tau_A^i \cdot \omega_e = \frac{r_0}{c} \cdot \omega_e \quad (5.4)$$

Avec :

α	Angle de rotation de la Terre pendant le temps de propagation du signal [rad]
τ_A^i	Temps de vol du signal [s]
r_0	Distance approchée entre le satellite et le récepteur [m]
c	Vitesse de la lumière [$\frac{m}{s}$] = $2.99792458 \cdot 10^8$ [$\frac{m}{s}$]
ω_e	Vitesse angulaire de rotation de la Terre [$\frac{rad}{s}$] = $7.2921151467 \cdot 10^{-5}$ [$\frac{rad}{s}$]

La distance r_0 est obtenue par différence de coordonnées cartésiennes géocentriques WGS84 entre la position du satellite au temps de l'émission et la position approchée du récepteur au temps de la réception du signal.

$$r_0 = |\mathbf{x}_{Sagnac}^i(t_{em}^i) - \mathbf{x}_A(t_{rec}^A)| \quad (5.5)$$

Avec :

$$t_{em}^i = t_{rec}^A - \tau_A^i \quad (5.6)$$

A partir de l'angle de rotation de la Terre, on peut calculer la matrice de rotation :

$$\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

On peut alors calculer la position du satellite au temps de l'émission, en la corrigeant de l'effet de la rotation de la Terre :

$$\mathbf{x}^i(t_{em}^i) = \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{x}_{Sagnac}^i(t_{em}^i) \quad (5.8)$$

5.3.3 Mesure de phase sur l'onde porteuse

La mesure de phase est déduite directement de l'onde porteuse et présente l'avantage d'être beaucoup plus précise que la mesure de pseudo-distance sur le code. La distance du satellite au récepteur se décompose en un nombre entier de longueurs d'onde ainsi que d'une fraction de longueur d'onde. Dans une mesure de phase, on observe uniquement la fraction de longueur d'onde et on ne connaît pas le nombre de longueurs d'onde entières. Ce nombre entier de cycles (1 cycle = 1 longueur d'onde) est appelée *ambiguïté de phase*. Ainsi, dans le cas d'une mesure de phase, il est nécessaire d'effectuer un calcul différentiel afin de déterminer la valeur de l'ambiguïté. En général, une fois que l'ambiguïté est fixée, elle ne change plus. Toutefois, dès que le signal est perdu, par exemple en cas de déplacement trop brusque du récepteur ou en cas d'obstruction entre le satellite et le récepteur, une nouvelle ambiguïté doit être calculée. On parle alors de *sauts de cycle* du signal observé.

$$L_A^i = \lambda \cdot (\Phi_A^i + \hat{v}_{\Phi_A^i}) = |\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_A| - \lambda \cdot \hat{N}_A^i + c \cdot \hat{\delta t}_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (5.9)$$

Avec

L_A^i	Mesure de phase [m]
Φ_A^i	Mesure de phase entre le satellite i et le récepteur A [cycle]
$\hat{v}_{\Phi_A^i}$	Résidu sur l'observation de phase [cycle]
λ	Longueur d'onde du signal observé [m]
\mathbf{x}^i	Position du satellite i au moment de l'émission du signal [m]
$\hat{\mathbf{x}}_A$	Position du récepteur A au moment de la réception du signal [m]
\hat{N}_A^i	Ambiguïté de phase (ambiguïté de zéro-différence) [-]
$\hat{\delta t}_{rec}^{recA}$	Erreur d'horloge du récepteur [s]
$\delta t_{em}^{sat_i}$	Erreur d'horloge du satellite [s]
$\delta \rho_{A,trop}^i$	Erreur due au retard troposphérique [m]
$\delta \rho_{A,iono}^i$	Erreur due au retard ionosphérique [m]

5.3.4 Calcul de la longueur d'onde

La longueur d'onde est déduite de la fréquence du signal observé. Ainsi, la longueur d'onde est calculée de la manière suivante :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (5.10)$$

λ	Longueur d'onde du signal observé [m]
c	Vitesse de la lumière [$\frac{m}{s}$] = $2.99792458 \cdot 10^8$ [$\frac{m}{s}$]
f	Fréquence du signal observé [Hz]

Ainsi, les longueurs d'ondes des signaux GPS L1 et L2 sont les suivants :

$$\lambda_{L1} = \frac{c}{f_{L1}} = \frac{2.99792458 \cdot 10^8}{1575.42 \cdot 10^6} = 0.1903 \quad (5.11)$$

$$\lambda_{L2} = \frac{c}{f_{L2}} = \frac{2.99792458 \cdot 10^8}{1227.60 \cdot 10^6} = 0.2442 \quad (5.12)$$

5.3.5 Doppler

Dans la vie quotidienne, on expérimente l'effet Doppler lorsque l'on entend la sirène d'une ambulance qui a l'air de changer d'amplitude lorsque l'ambulance s'approche ou s'éloigne de l'observateur.

En GNSS, l'effet Doppler est dû à la vitesse relative entre le satellite et le récepteur. En effet, la fréquence d'émission n'est pas exactement la même que la fréquence de réception du signal et dépend de la vitesse du satellite ainsi que de la vitesse du récepteur. L'effet Doppler n'intervient pas dans les calculs de positionnement ou de détermination d'attitude. Il peut toutefois aider à la détection des sauts de cycle (Herrero Mártil, 2022).

A titre indicatif, les formules ci-dessous sont tirées de (Teunissen and Montenbruck, 2017).

$$f_r = f^s \cdot \left(\frac{1 + \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_r}{c} \right)}{1 + \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_s}{c} \right)} \right) \quad (5.13)$$

$$D_r^s = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^s}{c} - \mathbf{e} \right) \cdot (\mathbf{v}^s - \mathbf{v}_r) + (df_r - df^s) + \frac{c}{\lambda} \cdot \delta f_{clk}^{rel} \quad (5.14)$$

Avec :

- D_r^s Mesure Doppler entre un satellite s et un récepteur r [Hz]
- f_r Fréquence de réception [Hz]
- f^s Fréquence d'émission [Hz]
- c Vitesse de la lumière dans le vide $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
- \mathbf{e}^i Vecteur en direction du satellite depuis le récepteur
- λ Longueur d'onde du signal observé [m]
- \mathbf{v}^s Vecteur vitesse du satellite $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
- \mathbf{v}_r Vecteur vitesse du récepteur $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
- df_r Erreur de fréquence du récepteur [Hz]
- df^s Erreur de fréquence du satellite [Hz]
- δf_{clk}^{rel} Effets relativistes

Dans ce projet, la mesure Doppler présente dans le fichier d'observation est trouvée en calculant la dérivée de la mesure de phase par rapport au temps.

$$D_r^s = \frac{d\Phi_A^i}{dt} \quad (5.15)$$

5.4 Méthodes de positionnement

Les méthodes de positionnement et leur précision dépendent de deux paramètres : est-ce un positionnement absolu ou relatif et s'agit-il d'un calcul en post-traitement ou en temps réel ?

Les tableaux 4 et 5 donnent un aperçu des précisions que l'on peut obtenir selon le type de calcul.

Un calcul en post-traitement est toujours plus précis qu'un calcul en temps réel. De même, l'exploitation des mesures de phase donne des résultats plus précis qu'avec des observations sur le code.

De plus, un positionnement relatif permet d'être plus précis qu'un positionnement absolu. En absolu, on détermine la *position* d'un point alors qu'en relatif, on détermine une ligne de base (*différence* de coordonnées) pour obtenir la position relative d'un point par rapport à un autre. La ligne de base est donc précise, même si la position du point ne l'est pas.

Les valeurs du tableau 4 et 5 sont des valeurs indicatives et sont tirées de (Guillaume, 2022a).

TABLE 4: Méthodes de positionnement en post-traitement

Méthode	Absolu	Relatif	Observation	Précision
SPP Single Point Positioning	x		Code	2-3 m
PPP Precise Point Positioning	x		Code + Phase	0.02-0.10 m
Code différentiel		x	Code	0.5-1.0 m
Phase différentiel		x	Phase	0.002 m + 0.5 ppm

TABLE 5: Méthodes de positionnement en temps réel

Méthode	Absolu	Relatif	Observation	Précision
SPP Single Point Positioning	x		Code	5-10 m
PPP Precise Point Positioning	x		Code + Phase	0.05-0.20 m
Code différentiel		x	Code	0.5-1.0 m
Phase différentiel (RTK)		x	Phase	0.02 m + 2 ppm

6 Erreurs

Un certain nombre d'erreurs peuvent intervenir dans les mesures GNSS. Elles interviennent soit au niveau du récepteur, soit au niveau du satellite, soit durant la propagation du signal entre les deux entités.

6.1 Erreurs d'horloge

On peut trouver 2 types d'erreurs d'horloge :

— L'erreur d'horloge du satellite

$$\delta t^i = t^i - t^{\text{GPS}} \quad (6.1)$$

— L'erreur d'horloge du récepteur

$$\delta t_A = t_A - t^{\text{GPS}} \quad (6.2)$$

Avec :

δt^i	Erreur d'horloge du satellite [s]
δt_A	Erreur d'horloge du récepteur [s]
t^i	Temps du satellite [s]
t_A	Temps du récepteur [s]
t^{GPS}	Temps GPS [s]

6.1.1 Erreur d'horloge du satellite

L'erreur d'horloge du satellite peut se définir comme la différence de temps entre le temps du satellite et le temps du système GNSS (par exemple le temps GPS). Elle se calcule grâce aux informations disponibles dans le fichier de navigation. La formule ci-dessous est tirée de (Herrero Mártel, 2022).

$$\delta t^i = a_0 + a_1 \cdot t_k + a_2 \cdot t_k^2 + \Delta t_{rel} \quad (6.3)$$

Avec :

δt^i	Erreur d'horloge du satellite [s]
t_k	Différence de temps entre l'époque d'observation et l'époque de référence de l'éphéméride [s]
a_0	Biais de l'horloge du satellite [s]
a_1	Drift (dérive) de l'horloge du satellite [$\frac{s}{s}$]
a_2	Drift rate (variation de la dérive) de l'horloge du satellite [$\frac{s}{s^2}$]
Δt_{rel}	Correction des effets relativistes [s]

Les effets relativistes sont dus à la courbure de l'espace-temps et peuvent être estimés par la formule suivante (Teunissen and Montenbruck, 2017) :

$$\Delta t_{rel} = -\frac{2}{c^2} \sqrt{a \cdot \mu} \cdot e \cdot \sin E \quad (6.4)$$

Avec :

Δt_{rel}	Correction des effets relativistes [s]
μ	Constante gravitationnelle terrestre [$\frac{m^3}{s^2}$]
c	Vitesse de la lumière dans le vide [$\frac{m}{s}$]
a	Demi grand-axe de l'orbite du satellite [m]
e	Excentricité de l'orbite du satellite [-]
E	Anomalie excentrique du satellite [rad]

Les effets relativistes sont négligés dans ce projet.

6.1.2 Erreur d'horloge du récepteur

L'erreur d'horloge du récepteur n'est pas connue a priori, mais elle peut être estimée dans le cas d'un calcul de positionnement sur le code. Dans le cas d'un calcul différentiel, elle s'annule automatiquement puisque l'on utilise une observation de double-différence. Si l'on souhaite effectuer un calcul d'attitude en utilisant plusieurs récepteurs, il est important de s'assurer que les horloges des récepteurs soient bien synchronisées entre elles. Si ce n'est pas le cas, par exemple en utilisant des récepteurs low-cost, et que la plateforme se déplace rapidement, il est nécessaire de calculer un facteur d'interpolation afin de tenir compte de la non-synchronisation des horloges des différents récepteurs (Willi, 2019). Dans ce projet, des récepteurs géodésiques sont utilisés et sont parfaitement synchronisés entre eux. On admet donc que tous les récepteurs ont la même erreur d'horloge (qui peut d'ailleurs être nulle).

6.2 Erreurs d'orbite

Les éphémérides décrites dans le fichier de navigation permettent de calculer la position du satellite dans l'espace en fonction du temps. Toutefois, les orbites diffusées ne sont calculées qu'avec une précision de l'ordre de quelques mètres. L'impact sur la ligne de visée entre le récepteur et le satellite est donc de l'ordre du mètre. Pour plus de précision, on peut également utiliser les éphémérides précises, recalculées a posteriori par les centres de contrôle. Ces éphémérides sont disponibles sous la forme de fichier *.sp3 et contiennent directement des coordonnées cartésiennes WGS84 et non plus des éléments de Kepler.

6.3 Erreurs atmosphériques

Lorsque les signaux GNSS traversent les couches de l'atmosphère, deux types d'erreurs atmosphériques apparaissent :

- L'erreur due à la **ionosphère** : la ionosphère est une couche de l'atmosphère comprise à une altitude entre 60 et 2000 km. Cette couche contient des particules électriquement chargées qui réagissent aux rayonnements solaires. Puisqu'il s'agit d'un milieu dispersif, le code et le message de navigation subissent un retard, tandis que la phase est accélérée (Bauer, 2017).
- L'erreur due à la **troposphère** : cette couche est la couche la plus basse de l'atmosphère puisqu'elle s'étend entre le niveau du sol jusqu'à une altitude d'environ 60 km. Les phénomènes météorologiques interviennent dans cette couche et l'erreur troposphérique retarde autant le code que la phase.

Plusieurs modèles permettent de modéliser ces erreurs et sont brièvement expliqués dans les paragraphes suivants. Si le récepteur utilise plusieurs fréquences, il est également possible d'utiliser une combinaison de fréquences pour éliminer certaines erreurs. C'est notamment le cas avec la fréquence L3 qui est une combinaison des fréquences L1 et L2 des signaux GNSS et qui permet de s'affranchir de l'erreur ionosphérique.

Dans le cas de calculs différentiels avec des lignes de base courtes (inférieures à 50 km), les erreurs atmosphériques s'annulent.

6.3.1 Erreur due à la ionosphère (Klobuchar)

Pour estimer le retard ionosphérique des mesures GPS, on peut utiliser le modèle de Klobuchar décrit ci-dessous. Le retard ionosphérique est dépendant notamment de l'activité solaire. En effet, comme son nom l'indique, cette couche de l'atmosphère est composée de particules chargées, dont la densité en électrons peut varier au cours du temps. Les coefficients α_n et β_n utilisés dans ce modèle sont diffusés dans le message de navigation des satellites GPS.

L'algorithme du modèle de Klobuchar décrit ci-dessous est tiré de l'encyclopédie en ligne de l'Agence Spatiale Européenne (ESA) (J. Sanz Subirana and Hernández-Pajares, 2011a) et repris par (Guillaume, 2022a).

Données en entrée :

- ϕ_u Latitude récepteur [°]
- λ_u Longitude récepteur [°]
- E° Élévation du satellite [°]
- A Azimuth du satellite [°]
- α_n, β_n Coefficients pour le calcul de l'amplitude et de la période du retard ionosphérique

1. Calcul de l'élévation en demi-cercles E :

$$E = \frac{E^\circ}{\pi} \text{ [demi-cercles]} \quad (6.5)$$

2. Calcul de l'angle centré sur la terre ψ :

$$\psi = \frac{0.0137}{E + 0.11} - 0.022 \text{ [demi-cercles]} \quad (6.6)$$

3. Calcul de la latitude du point de percée ionosphérique (IPP) (ce point schématise la traversée de la ionosphère et se trouve à environ 350 km d'altitude) ϕ_I :

$$\phi_I = \phi_u + \psi \cdot \cos A \text{ [demi-cercles]} \quad (6.7)$$

Si $\phi_I > +0.416$, alors $\phi_I = +0.416$.

Si $\phi_I < -0.416$, alors $\phi_I = -0.416$.

4. Calcul de la longitude du point de percée ionosphérique (IPP) λ_I :

$$\lambda_I = \lambda_u + \frac{\psi \cdot \sin A}{\cos \phi_I} \text{ [demi-cercles]} \quad (6.8)$$

5. Calcul de la latitude géomagnétique du point de percée ionosphérique (IPP) ϕ_m :

$$\phi_m = \phi_I + 0.064 \cdot \cos(\lambda_I - 1.617) \text{ [demi-cercles]} \quad (6.9)$$

6. Calcul du temps local à l'IPP t :

$$t = 43200 \cdot \lambda_I + t^{\text{GPS}} \text{ [s]} \quad (6.10)$$

Avec $0 \leq t < 86400$.

Si $t \geq 86400$, alors $t = t - 86400$; si $t \leq 86400$, alors $t = t + 86400$

7. Calcul de la période du retard ionosphérique P_I :

$$P_I = \sum_{n=0}^3 \beta_n \cdot \phi_m^n \text{ [s]} \quad (6.11)$$

Si $P_I \geq 72000$, alors $P_I = 72000$

8. Calcul de l'amplitude du retard ionosphérique A_I

$$A_I = \sum_{n=0}^3 \alpha_n \cdot \phi_m^n \text{ [s]} \quad (6.12)$$

Si $A_I \leq 0$, alors $A_I = 0$

9. Calcul de la phase du retard ionosphérique X_I :

$$X_I = \frac{2\pi(t - 50400)}{P_I} \text{ [rad]} \quad (6.13)$$

10. Calcul du facteur d'inclinaison (slant factor) F :

$$F = 1 + 16 \cdot (0.53 - E)^3 \text{ [-]} \quad (6.14)$$

11. Calcul du retard ionosphérique temporel sur le signal GPS L1 I_{L1GPS} :

$$I_{\text{L1GPS}} = \begin{cases} \left[5 \cdot 10^{-9} + A_I \cdot \left(1 - \frac{X_I^2}{2} + \frac{X_I^4}{24} \right) \right] \cdot F \text{ [s]} & \text{si } |X_I| \leq 1.57 \\ 5 \cdot 10^{-9} \cdot F \text{ [s]} & \text{si } |X_I| \geq 1.57 \end{cases} \quad (6.15)$$

12. Calcul du retard ionosphérique I_f pour n'importe quelle fréquence :

$$I_f = \left(\frac{f_{\text{L1GPS}}}{f} \right)^2 \cdot I_{\text{L1GPS}} \text{ [s]} \quad (6.16)$$

13. Calcul du retard ionosphérique sur la distance $\delta\rho_{iono}^i$:

$$\delta\rho_{iono}^i = c \cdot I_f \text{ [m]} \quad (6.17)$$

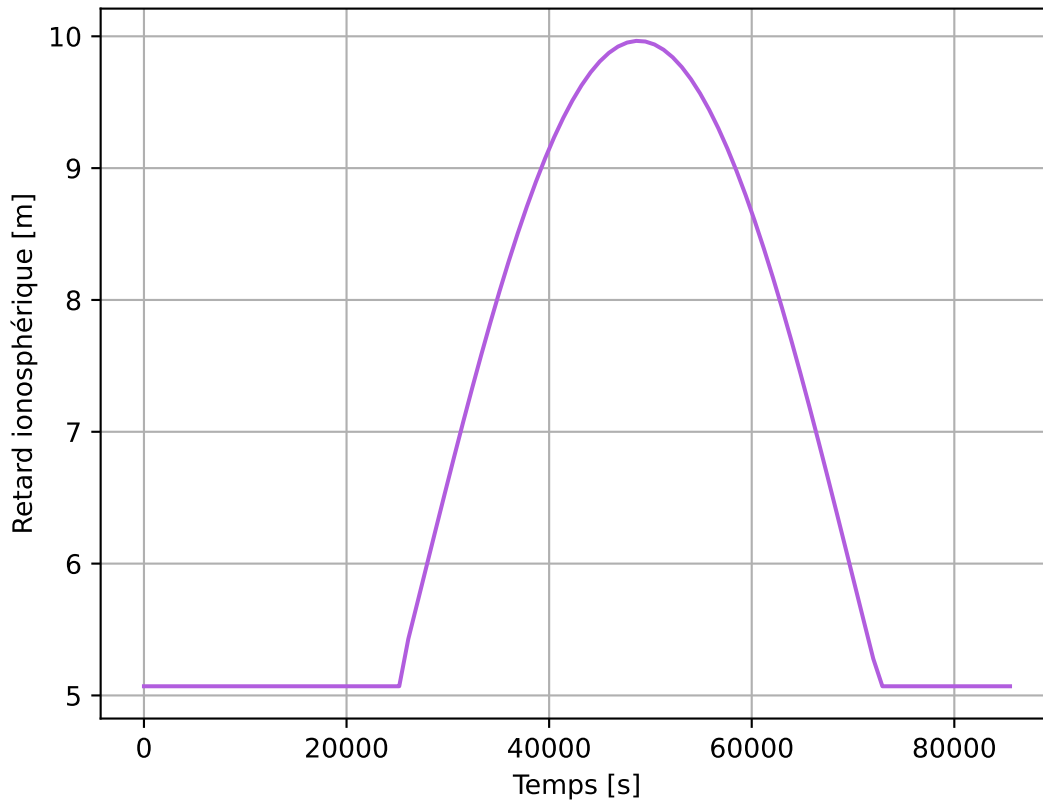


FIGURE 2 – Retard ionosphérique selon le modèle de Klobuchar

La figure 2 permet de visualiser le retard ionosphérique en fonction du moment de la journée. On voit que les valeurs sont maximales en début d'après-midi, lorsque l'activité solaire est la plus intense.

6.3.2 Erreur due à la ionosphère (NeQuick)

Le modèle NeQuick a été développé pour modéliser l'erreur ionosphérique dans le cas d'utilisation de satellites Galileo (J. Sanz Subirana and Hernández-Pajares, 2011b). Il est plus complexe que le modèle de Klobuchar et le principe de base est de déterminer la densité d'électrons le long de la ligne de visée entre le récepteur et le satellite. Le modèle NeQuick détermine cette densité non-seulement en fonction de la position du récepteur et du satellite, mais également en fonction du mois de l'année et de l'heure locale. En effet, l'activité solaire varie au cours de l'année et des grilles de valeurs sont appelées dans le calcul pour effectuer une interpolation.

$$Az = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 \quad (6.18)$$

$$\tan \mu = \frac{I}{\sqrt{\cos \phi}} \quad (6.19)$$

Avec :

- Az Niveau de ionisation effectif [unité de flux solaire]
- a_0, a_1, a_2 Coefficients issus du message de navigation Galileo
- μ Latitude modifiée du point de percée ionosphérique [rad]
- ϕ Latitude géographique du point de percée ionosphérique [rad]
- I Inclinaison magnétique vraie [rad]

La densité d'électrons (TEC) le long de la traversée de la ionosphère est calculée à partir du niveau de ionisation Az et selon les grilles de données de l'algorithme NeQuick.

$$I_f = \left(\frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f^2} \right) \cdot \text{TEC} \quad (6.20)$$

Avec :

- I_f Retard ionosphérique [s]
- TEC Densité totale d'électrons [TEC]

6.3.3 Erreur due à la troposphère (Saastamoinen)

Les couches basses de l'atmosphère ne contiennent quasiment pas de particules chargées. Toutefois, les molécules de gaz qui deviennent de plus en plus denses quand on s'approche de la Terre sont responsables du retard troposphérique. Dans le cas d'ondes courtes, la réfraction troposphérique ne dépend pas de la fréquence, ce qui signifie que les signaux sur le code et sur la phase subissent le même retard. Pour estimer le retard troposphérique, on peut utiliser le modèle de Saastamoinen, décrit ci-dessous et tiré de (Bauer, 2017) :

$$d_{\text{trop}} = \frac{2.277 \cdot 10^{-3}}{\cos \zeta} \cdot \left(P + \frac{1.255}{T + 273.15} + 0.05 \right) \cdot e - B \cdot (\tan \zeta)^2 \quad (6.21)$$

Avec :

- d_{trop} Retard troposphérique [m]
- ζ Angle zénithal [°]
- T Température [°C]
- P Pression [mbar]
- e Pression partielle de vapeur d'eau [mbar]
- h Altitude du récepteur [m]

La pression partielle de vapeur d'eau se calcule de la manière suivante :

$$e = H \cdot 0.0611 \cdot 10^{\frac{7.5 \cdot (T - 273.15)}{237.3 + (T - 273.15)}} \quad (6.22)$$

Avec :

- e Pression partielle de vapeur d'eau [mbar]
- T Température du lieu [K]
- H Humidité relative (50)[%]

Température et pression au niveau de la mer :

$$\begin{aligned} T_0 &= 288.15 \text{ [K]} \\ P_0 &= 1013.25 \text{ [mbar]} \end{aligned}$$

Température et pression au niveau du lieu :

$$T = T_0 - 6.5 \cdot 10^{-3} \cdot h \text{ [K]} \quad (6.23)$$

$$P = P_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5.256} \text{ [mbar]} \quad (6.24)$$

Le facteur B de l'équation (6.21) se calcule de la manière suivante :

$$B = 1.156 - 0.156 \cdot 10^{-3} \cdot h + 7.53 \cdot 10^{-9} \cdot h^2 \quad (6.25)$$

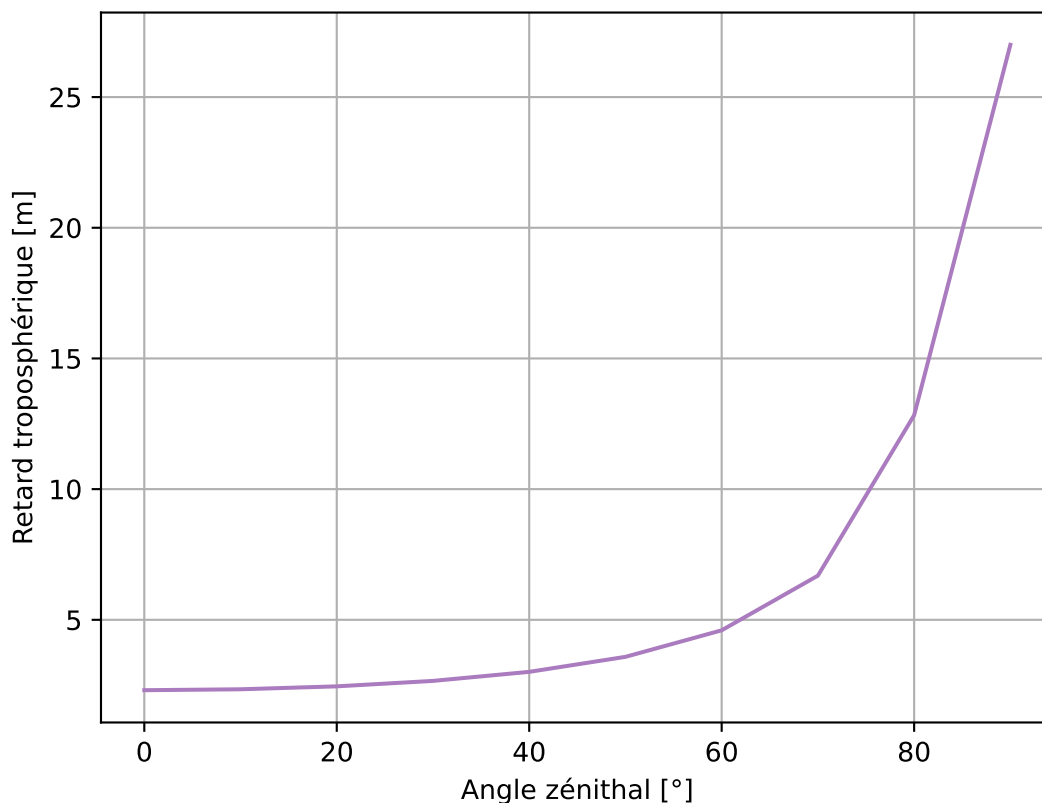


FIGURE 3 – Retard troposphérique selon le modèle de Saastamoinen

Comme le montre la figure 3, l'erreur due à la troposphère dépend principalement de l'angle zénithal sous lequel on voit le satellite. Les autres paramètres n'ont que très peu d'influence sur le calcul de l'erreur.

6.4 Erreurs non prises en compte

Plusieurs autres erreurs peuvent intervenir. Toutefois, elles ne sont pas modélisées dans la simulation de ce projet. Il s'agit notamment des erreurs suivantes :

- Erreur due aux **multi-trajets** : ce phénomène se manifeste lorsque le signal GNSS n'arrive pas directement du satellite à l'antenne du récepteur mais est réfléchi par une surface avant d'arriver à l'antenne. Un moyen pour limiter ce problème serait d'utiliser des antennes *choke ring* qui permettent d'éviter les multi-trajets. Si les antennes sont très proches l'une de l'autre comme c'est le cas avec la plateforme, les signaux pourraient interférer les uns avec les autres. Les erreurs de multi-trajets sont difficiles à modéliser et la solution serait simplement de supprimer les observations entachées de cette erreur.
- Erreur due à la **calibration** du centre de phase de l'antenne : le centre de phase n'est pas un point physiquement bien défini, puisqu'il dépend de l'orientation de l'antenne. Ainsi, une calibration du centre de phase est nécessaire (Willi, 2019). La calibration d'antennes se trouve dans un fichier ANTEX, utilisé notamment dans les calculs avec le logiciel RTKLIB. Il est important d'utiliser des modèles d'antennes dans le cas d'un calcul de précision (positionnement PPP, positionnement relatif de précision), en particulier si plusieurs types d'antennes différentes sont utilisés. Dans le fichier de calibration d'antenne, on trouve des informations sur le centre de phase de l'antenne (PCO) de même que les corrections selon la direction des satellites par rapport à l'antenne (PCV). Dans ce projet, toutes les antennes utilisées sont du même type et orientées dans le même sens. L'erreur due à la calibration du centre de phase n'est donc pas prise en compte.

7 Calcul des orbites

Le calcul d'orbites est décrit dans (Bauer, 2017). Il existe essentiellement deux manières de calculer les orbites des satellites :

- Calcul par **éléments de Kepler** : c'est la façon la plus rigoureuse de calculer n'importe quelle position sur une orbite. En effet, les éléments de Kepler définissent entièrement l'orbite et ces éphémérides broadcastées sont disponibles dans le fichier de navigation des systèmes GPS, Galileo et Beidou.
- Calcul par **interpolation** de positions le long de l'orbite : cette méthode de calcul est utilisée lorsque l'on ne dispose pas des éléments de Kepler mais uniquement des positions du satellite (et éventuellement des vitesses et des accélérations) à certaines époques. C'est le cas pour le système russe GLONASS qui diffuse ce type d'informations dans son message de navigation. Une interpolation est également effectuée lorsque l'on utilise un fichier d'orbites précises (post-traitées par le secteur de contrôle).

Les éphémérides sont disponibles directement dans le fichier de navigation. Les fichiers d'orbites précises peuvent être téléchargés via un serveur ftp à l'adresse : <http://navigation-office.esa.int/products/gnss-products>.

7.1 Calcul par éléments de Kepler

En utilisant les informations contenues dans le message de navigation pour les systèmes GPS, Galileo et Beidou, on peut calculer la position d'un satellite sur son orbite via les éléments de Kepler. Le tableau 6 donne une vue d'ensemble des éléments de Kepler contenus dans le fichier de navigation GPS et utilisés pour le calcul d'orbites. La dernière colonne donne des valeurs chiffrées de l'éphéméride du 24.06.2020 à UTC 16h 00min 00sec du satellite G01.

TABLE 6: Eléments de Kepler

Symbole	Description	Unité	Exemple
t_r	Epoque de référence de l'éphéméride en secondes de semaine GPS	[s]	+316800
\sqrt{a}	Racine carrée du demi-grand axe de l'ellipse orbitale	$[\sqrt{m}]$	+5153.707614899
Δn	Correction de la vitesse angulaire moyenne	[rad/s]	+4.436970531918e-09
M_0	Anomalie moyenne	[rad]	+0.616820390188
e	Excentricité de l'ellipse orbitale	[-]	+0.0100036773365
ω	Argument du périhélie	[rad]	+0.7937939424182
Ω_0	Paramètre pour l'ascension droite du noeud ascendant	[rad]	+2.573196111398
$\dot{\Omega}$	Variation temporelle de l'ascension droite du noeud ascendant	[rad/s]	-8.438565785851e-09
i_0	Inclinaison orbitale à l'époque de référence	[rad]	+0.9806547171881
\dot{i}	Variation temporelle de l'inclinaison orbitale	[rad/s]	-3.200133298397e-10
C_{uc}	Paramètre de correction de l'argument de latitude	[rad]	-3.049150109291e-06
C_{us}	Paramètre de correction de l'argument de latitude	[rad]	+1.810491085052e-06
C_{rc}	Paramètre de correction de la distance radiale	[m]	+353.125
C_{rs}	Paramètre de correction de la distance radiale	[m]	-62.5625
C_{ic}	Paramètre de correction de l'inclinaison orbitale	[rad]	-8.754432201385e-08
C_{is}	Paramètre de correction de l'inclinaison orbitale	[rad]	+1.415610313416e-07

La figure 4 permet de visualiser les éléments utiles pour le calcul d'orbite via les éléments de Kepler.

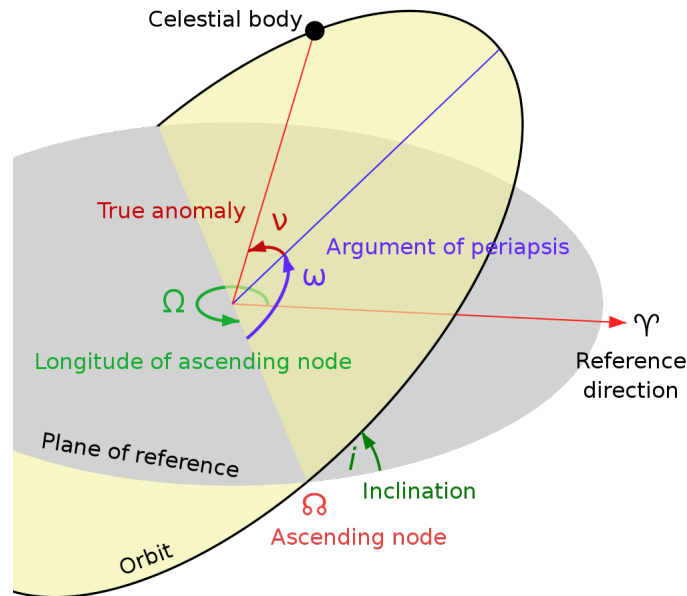


FIGURE 4 – Eléments d'orbites, By Lasunncty at the English Wikipedia, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8971052>

Les étapes ci-dessous présentent le calcul d'orbite pas à pas et sont tirées de (Bauer, 2017) :

1. Transformation de l'époque d'observation en temps GPS
2. Calcul de la différence entre l'époque d'observation et l'époque de référence de l'éphéméride

$$\Delta t = t_k - t_r \quad (7.1)$$

Avec :

- Δt Différence entre l'époque d'observation et l'époque de référence de l'éphéméride [s]
- t_k Epoque d'observation en secondes de semaine GPS [s]
- t_r Epoque de référence de l'éphéméride en seconde de semaine GPS [s]

3. Calcul de la vitesse angulaire moyenne n_k :

$$n_k = n_0 + \Delta n \quad (7.2)$$

Où :

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mu_e}{a^3}} \quad (7.3)$$

Avec :

- n_0 Vitesse angulaire [$\frac{rad}{s}$]
- G Constante de gravitation universelle [$\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$]
- M Masse de la Terre [kg]
- μ_e Constante de gravitation terrestre [$\frac{m^3}{s^2}$]
- a Demi-grand axe de l'ellipse orbitale ($a = (\sqrt{a})^2$) [m]
- Δn Correction de la vitesse angulaire moyenne [rad/s]

4. Calcul de l'anomalie moyenne M_k :

$$M_k = M_0 + n_k \cdot \Delta n \quad (7.4)$$

Avec :

- M_k Anomalie [rad]
- M_0 Anomalie moyenne [rad]
- n_k Vitesse angulaire moyenne [rad/s]
- Δn Correction de la vitesse angulaire moyenne [rad/s]

5. Calcul de l'anomalie excentrique E_k :

$$\boxed{M_k = E_k - e \cdot \sin(E_k)} \quad (7.5)$$

Avec :

- M_k Anomalie [rad]
- E_k Anomalie excentrique [rad]
- e Excentricité de l'ellipse orbitale [-]

E_k se calcule par itération :

$$E_k = M_k \quad (7.6)$$

Tant que :

$$E_k - (M_k + e \cdot E_k) > 1 \cdot 10^{-12} \quad (7.7)$$

Alors :

$$E_k = M_k + e \cdot \sin(E_k) \quad (7.8)$$

6. Calcul de l'anomalie vraie v_k :

$$\boxed{v_k = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin(E_k)}{\cos(E_k) - e}\right)} \quad (7.9)$$

Avec :

- v_k Anomalie vraie [rad]
- E_k Anomalie excentrique [rad]
- e Excentricité de l'ellipse orbitale [-]

7. Calcul de l'argument de latitude u_k :

$$\boxed{u_k = u_0 + \Delta u} \quad (7.10)$$

Où :

$$u_0 = v_k + \omega \quad (7.11)$$

$$\Delta u = C_{uc} \cdot \cos(2 \cdot u_0) + C_{us} \cdot \sin(2 \cdot u_0) \quad (7.12)$$

Avec :

- u_k Argument de latitude [rad]
- v_k Anomalie vraie [rad]
- ω Argument du périégée [rad]
- C_{uc}, C_{us} Paramètres de correction de l'argument de latitude [rad]

8. Calcul de la distance radiale

$$\boxed{r_k = r_0 + \Delta r} \quad (7.13)$$

Où :

$$r_0 = a \cdot (1 - e \cdot \cos(E_k)) \quad (7.14)$$

$$\Delta r = C_{rc} \cdot \cos(2 \cdot u_0) + C_{rs} \cdot \sin(2 \cdot u_0) \quad (7.15)$$

Avec :

- r_k Distance radiale [m]
- a Demi-grand axe de l'ellipse orbitale [m]
- e Excentricité de l'ellipse orbitale [-]
- E_k Anomalie excentrique [rad]
- C_{rc}, C_{rs} Paramètres de correction de la distance radiale [m]

9. Calcul des coordonnées dans le plan orbital :

$$x_k = r_k \cdot \cos(u_k) \quad (7.16)$$

$$y_k = r_k \cdot \sin(u_k) \quad (7.17)$$

Avec :

- x_k, y_k Coordonnées x et y dans le plan orbital [m]
- r_k Distance radiale [m]

u_k argument de latitude [rad]

10. Calcul de la longitude du noeud ascendant :

$$\beta_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e) \cdot t_k - \omega_e \cdot t_r \quad (7.18)$$

Avec :

- β_k Longitude du noeud ascendant [rad]
- Ω_0 Paramètre pour l'ascension droite du noeud ascendant [rad]
- $\dot{\Omega}$ Variation temporelle de l'ascension droite du noeud ascendant [rad/s]
- ω_e Vitesse angulaire de rotation de la Terre [rad/s]
- t_k Epoque d'observation en secondes de semaine GPS [s]
- t_r Epoque de référence de l'éphéméride en seconde de semaine GPS [s]

11. Calcul de l'inclinaison orbitale i_k :

$$\boxed{i_k = i_0 + \dot{i} \cdot \Delta t + \Delta i} \quad (7.19)$$

Où :

$$\Delta i = C_{ic} \cdot \cos(2 \cdot u_0) + C_{is} \cdot \sin(2 \cdot u_0) \quad (7.20)$$

Avec :

- i_k Inclinaison orbitale [rad]
- i_0 Inclinaison orbitale à l'époque de référence [rad]
- \dot{i} Variation temporelle de l'inclinaison orbitale [rad/s]
- ω_e Vitesse angulaire de rotation de la Terre [rad/s]
- Δt Différence entre l'époque d'observation et l'époque de référence de l'éphéméride [s]
- C_{ic}, C_{is} Paramètres de correction de l'inclinaison orbitale [rad]

12. Calcul des coordonnées dans le système terrestre global

$$x^{\text{WGS84}} = x_k \cdot \cos(\beta_k) - y_k \cdot \cos(i_k) \cdot \sin(\beta_k) \quad (7.21)$$

$$y^{\text{WGS84}} = x_k \cdot \sin(\beta_k) + y_k \cdot \cos(i_k) \cdot \cos(\beta_k) \quad (7.22)$$

$$z^{\text{WGS84}} = y_k \cdot \sin(i_k) \quad (7.23)$$

Avec :

- $x^{\text{WGS84}}, y^{\text{WGS84}}, z^{\text{WGS84}}$ Position du satellite dans le système WGS84 [m]
- x_k, y_k Position du satellite dans le plan orbital [m]
- β_k Longitude du noeud ascendant [rad]
- i_k Inclinaison orbitale [rad] [rad]

13. Calcul de la vitesse dans le plan orbital :

$$\dot{x}_k = \dot{r}_k \cdot \cos(u_k) - r_k \cdot \sin(u_k) \cdot \dot{u}_k \quad (7.24)$$

$$\dot{y}_k = \dot{r}_k \cdot \sin(u_k) + r_k \cdot \cos(u_k) \cdot \dot{u}_k \quad (7.25)$$

Avec :

$$\dot{u}_k = \dot{v}_k + 2 \cdot [C_{us} \cdot \cos(2 \cdot u_0) - C_{uc} \cdot \sin(2 \cdot u_0)] \cdot v_k \quad (7.26)$$

$$\dot{r}_k = a \cdot e \cdot \sin(E_k) \cdot \dot{E}_k + 2 \cdot [C_{rs} \cdot \cos(2 \cdot u_0) - C_{rc} \cdot \sin(2 \cdot u_0)] \cdot v_k \quad (7.27)$$

Et :

$$\dot{E}_k = \frac{n_k}{1 - e \cdot \cos(E_k)} \quad (7.28)$$

$$\dot{v}_k = \frac{\sin(E_k) \cdot \dot{E}_k \cdot (1 + e \cdot \cos(v_k))}{1 - \cos(E_k) \cdot e \cdot \sin(v_k)} \quad (7.29)$$

14. Calcul de la vitesse dans le système terrestre global

$$v_{x^{\text{WGS84}}} = \dot{x}_k \cdot \cos(\beta_k) - \dot{y}_k \cdot \cos(i_k) \cdot \sin(\beta_k) + y_k \cdot \sin(i_k) \cdot \sin(\beta_k) \cdot \dot{i}_k - y^{\text{WGS84}} \cdot \dot{\beta}_k \quad (7.30)$$

$$v_{y^{\text{WGS84}}} = \dot{x}_k \cdot \sin(\beta_k) + \dot{y}_k \cdot \cos(i_k) \cdot \cos(\beta_k) - y_k \cdot \sin(i_k) \cdot \cos(\beta_k) \cdot \dot{i}_k + x^{\text{WGS84}} \cdot \dot{\beta}_k \quad (7.31)$$

$$v_{z^{\text{WGS84}}} = \dot{y}_k \cdot \sin(i_k) + y_k \cdot \cos(i_k) \cdot \dot{i}_k \quad (7.32)$$

Avec :

$$\dot{i}_k = \dot{i}_k + 2 \cdot [C_{is} \cdot \cos(2 \cdot u_0) - C_{ic} \cdot \sin(2 \cdot u_0)] \cdot v_k \quad (7.33)$$

$$\dot{\beta}_k = \dot{\Omega} - \omega_e \quad (7.34)$$

7.2 Calcul à partir des vecteurs de coordonnées, de vitesse et d'accélération (GLONASS)

Dans le cas de GLONASS, il est nécessaire de calculer une interpolation pour trouver la position du satellite. En effet, le fichier de navigation des satellites GLONASS ne contient pas les éléments de Kepler, mais stocke directement la position, la vitesse et l'accélération des satellites au temps de référence de l'éphéméride. Il est important de souligner que les coordonnées sont fournies dans le système de référence russe PZ90 et non pas dans le système WGS84.

TABLE 7: Ephémérides GLONASS

Symbole	Description	Unité	Exemple
t_{eph}	Epoque de référence de l'éphéméride en temps UTC		
x^{PZ90}	Position x^{PZ90} du satellite	[km]	
y^{PZ90}	Position y^{PZ90} du satellite	[km]	
z^{PZ90}	Position z^{PZ90} du satellite	[km]	
v_x	Vitesse \dot{x}_{PZ90} du satellite	[km/sec]	
v_y	Vitesse \dot{y}_{PZ90} du satellite	[km/sec]	
v_z	Vitesse \dot{z}_{PZ90} du satellite	[km/sec]	
a_x	Accélération \ddot{x}_{PZ90} du satellite	[km/sec ²]	
a_y	Accélération \ddot{y}_{PZ90} du satellite	[km/sec ²]	
a_z	Accélération \ddot{z}_{PZ90} du satellite	[km/sec ²]	

$$\mathbf{x}^{PZ90} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

$$\mathbf{v}^{PZ90} = \dot{\mathbf{x}}^{PZ90} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{a}^{PZ90} = \dot{\mathbf{v}}^{PZ90} = \ddot{\mathbf{x}}^{PZ90} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

Pour calculer une accélération au temps t , on utilise la formule suivante :

$$\mathbf{k}_a = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{PZ90}, \mathbf{v}^{PZ90}) = \begin{pmatrix} -\frac{GM}{r^3} \cdot x + \frac{3}{2} \cdot C_{20} \cdot \frac{GM \cdot a_e^2}{r^5} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot z^2}{r^2}\right) + \omega_e^2 \cdot x + 2 \cdot \omega_e \cdot v_y + a_{xs} \\ -\frac{GM}{r^3} \cdot y + \frac{3}{2} \cdot C_{20} \cdot \frac{GM \cdot a_e^2}{r^5} \cdot y \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot z^2}{r^2}\right) + \omega_e^2 \cdot y + 2 \cdot \omega_e \cdot v_x + a_{ys} \\ -\frac{GM}{r^3} \cdot z + \frac{3}{2} \cdot C_{20} \cdot \frac{GM \cdot a_e^2}{r^5} \cdot z \cdot \left(3 - \frac{5 \cdot z^2}{r^2}\right) + a_{zs} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

Où :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7.39)$$

Avec :

GM Constante de gravitation de la Terre [$\frac{m^3}{s^2}$]

a_e Rayon de la Terre à l'équateur [m]

C_{20} Coefficient servant à décrire la perturbation de l'orbite causée par l'aplatissement terrestre

ω_e Vitesse angulaire de rotation de la Terre [rad/s]

a_{xs}, a_{ys}, a_{zs} Accélération liées à l'attraction du Soleil et de la Lune [$\frac{m}{s^2}$]

Pour le système GLONASS, il faut prendre les constantes du système russe PZ90. La position du satellite au temps de l'époque souhaitée se trouve en appliquant l'algorithme de Runge-Kutta, bien expliqué dans (Bauer, 2017). Comme le système GLONASS n'est pas utilisé dans ce projet, ce sujet n'est pas développé dans ce rapport. Toutefois, l'algorithme a été implémenté en python et pourra faire l'objet d'une intégration future dans ce type de projet.

8 Lignes de base

Une ligne de base désigne le vecteur qui sépare deux récepteurs. Il s'agit donc d'une différence de coordonnées entre les deux points considérés. En général, le récepteur de base est fixe et le récepteur secondaire est itinérant (sauf dans le cas des lignes de base cinématique où les deux récepteurs sont itinérants). Un calcul de ligne de base permet donc de définir les coordonnées relatives du récepteur itinérant par rapport à une antenne de référence. Dans la majorité des cas, on calcule des lignes de base en utilisant des mesures de phase, plus précises que les mesures sur le code. Les lignes de base sont le fondement du calcul différentiel et il est nécessaire de connaître quelques notions sur les observations de n -différence pour comprendre de quoi il s'agit réellement.

8.1 Zéro-différence

Une mesure de zéro-différence correspond simplement à la mesure brute entre un satellite et un récepteur.

$$L_A^i = \lambda \cdot \Phi_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_A^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (8.1)$$

8.2 Simple-différence

Une simple-différence est la différence entre une mesure de zéro-différence entre un récepteur A et un satellite i et une mesure de zéro-différence entre un récepteur B et le même satellite i . On utilise donc 2 récepteurs et 1 satellite pour construire cette observation.

$$L_A^i = \lambda \cdot \Phi_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_A^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (8.2)$$

$$L_B^i = \lambda \cdot \Phi_B^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| - \lambda \cdot N_B^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{B,trop}^i + \delta \rho_{B,iono}^i \quad (8.3)$$

En calculant la différence entre les deux observations de zéro-différences on obtient une nouvelle observation de simple-différence :

$$\lambda \cdot \Delta \Phi_{AB}^i = \lambda \cdot \Phi_B^i - \lambda \cdot \Phi_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot \Delta N_{AB}^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{rec}^{recA} \quad (8.4)$$

Si la ligne de base entre le récepteur A et le récepteur B est courte, on admet que les erreurs ionosphériques ainsi que les erreurs troposphériques sont les mêmes pour les deux récepteurs et par conséquent s'annulent :

$$\delta \rho_{B,iono}^i \cong \delta \rho_{A,iono}^i \quad (8.5)$$

$$\delta \rho_{B,trop}^i \cong \delta \rho_{A,trop}^i \quad (8.6)$$

De plus, l'erreur d'horloge du satellite s'annule également.

On peut également reformuler la différence de distance géométrique comme suit (Herrero Mártel, 2022) :

$$\rho_{AB}^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| = \rho_B^i - \rho_A^i = -\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{b}_{AB} \quad (8.7)$$

Avec :

\mathbf{e}^i Ligne de visée en direction du satellite i

\mathbf{b}_{AB} Ligne de base entre les récepteurs A et B

Si la ligne de base est courte, on considère que la ligne de visée entre le récepteur A et le satellite i est parallèle à la ligne de visée entre le récepteur B et le satellite i .

8.3 Double-différence

Une double-différence est la différence entre deux simple-différences entre les récepteurs A et B et les satellites i et j . On remarque que par ce calcul on élimine l'erreur d'horloge des récepteurs.

$$\lambda \cdot \Delta \Phi_{AB}^i = \lambda \cdot \Phi_B^i - \lambda \cdot \Phi_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot \Delta N_{AB}^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{rec}^{recA} \quad (8.8)$$

$$\lambda \cdot \Delta \Phi_{AB}^j = \lambda \cdot \Phi_B^j - \lambda \cdot \Phi_A^j = |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot \Delta N_{AB}^j + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{rec}^{recA} \quad (8.9)$$

$$\lambda \cdot \nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij} = |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| + |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (8.10)$$

Avec n satellites, on peut former $n-1$ double-différences.

La terme des distances géométriques peut s'écrire de cette façon :

$$\rho_{AB}^{ij} = (\rho_B^j - \rho_A^j) - (\rho_B^i - \rho_A^i) = -\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{b}_{AB} + \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{b}_{AB} = (\mathbf{e}^j - \mathbf{e}^i) \cdot \mathbf{b}_{AB} \quad (8.11)$$

8.4 Triple-différence

Une triple-différence est la différence entre deux double-différences calculées entre deux époques successives. Elle n'a plus de géométrie, mais permet de détecter des sauts de cycles.

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \Delta \Phi_{AB_{12}}^{ij} = \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB_1}^{ij} - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB_2}^{ij} \quad (8.12)$$

Le tableau 8 offre un aperçu des principales caractéristiques du calcul de n -différences des lignes de base.

TABLE 8: Caractéristiques du calcul des différences

Type de différence	Nb réc.	Nb sat.	Nb époques	Propriétés
Zéro	1	1	1	Mesure brute
Simple	2	1	1	Elimination des erreurs : horloge du satellite, troposphère, ionosphère
Double	2	2	1	Elimination des erreurs : horloge du récepteur
Triple	2	2	2	Perte de la géométrie, mais possibilité de détecter des sauts de cycle

8.4.1 Mesure différentielle sur le code

On peut également former des différence à partir des mesures sur le code :

Zéro différence :

$$P_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| + c \cdot \delta t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (8.13)$$

$$P_B^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{B,trop}^i + \delta \rho_{B,iono}^i \quad (8.14)$$

Simple différence :

$$\Delta P_{AB}^i = P_B^i - P_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{rec}^{recA} \quad (8.15)$$

$$\Delta P_{AB}^j = P_B^j - P_A^j = |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{rec}^{recA} \quad (8.16)$$

Double différence :

$$\nabla \Delta P_{AB}^{ij} = |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| + |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| \quad (8.17)$$

9 Définitions, conventions et relations entre les systèmes

Dans ce projet, plusieurs systèmes de coordonnées sont utilisés et il est nécessaire de les définir précisément ainsi que d'explicitier les paramètres de transformation d'un système à l'autre. Le tableau 9 ainsi que la figure 5 donne un aperçu des systèmes utilisés dans ce projet.

TABLE 9: Systèmes de coordonnées utilisés

Nom	Description	Type de système	Variation
IMU	Système de la centrale inertielle	Main droite	Non
Body	Système de la plateforme	Main droite	Non
Topo	Système topocentrique ellipsoïdal	Main droite	Oui
TRS (WGS84)	Système de référence terrestre	Main droite	Non

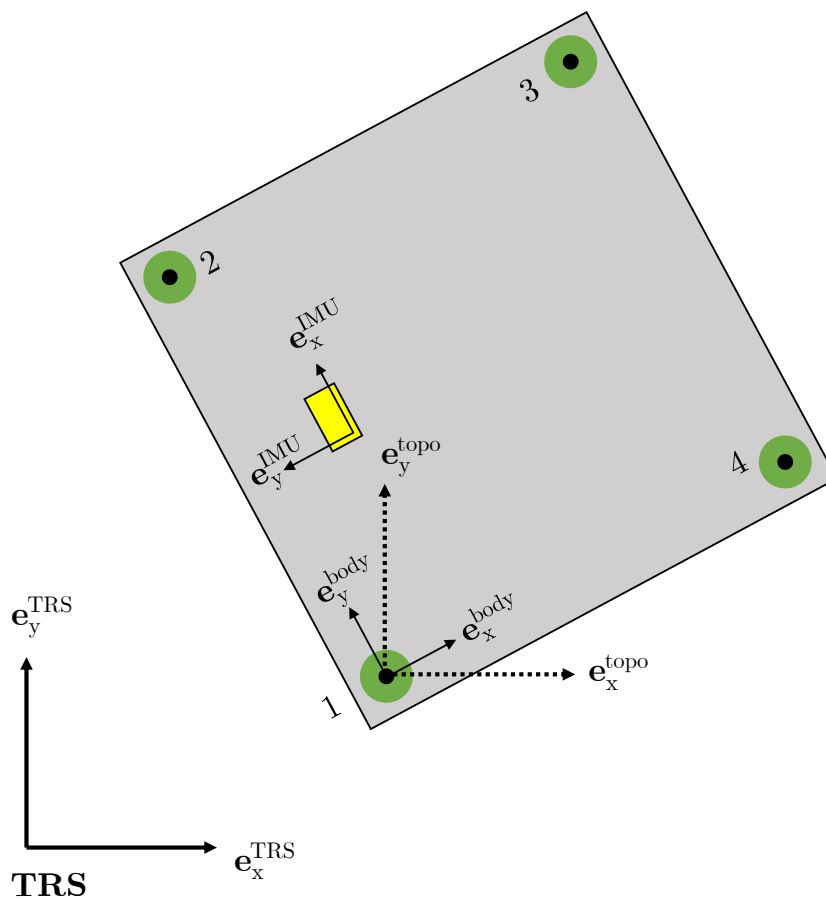


FIGURE 5 – Systèmes utilisés

9.1 Système TRS (WGS84)

Le système de référence terrestre (TRS) est un système global, main droite, défini selon le système standard et centré au centre de la Terre représentée par l'ellipsoïde GRS80 (puisque l'on utilise le système WGS84). Les coordonnées exprimées dans ce système sont des coordonnées cartésiennes géocentriques. C'est dans ce système-là que sont exprimées les coordonnées des satellites. Ses vecteurs de base sont définis de la façon suivante :

- L'origine \mathbf{o}^{TRS} se trouve au centre de l'ellipsoïde de révolution de référence (GRS80).
- L'axe $\mathbf{e}_x^{\text{TRS}}$ pointe en direction de l'intersection du plan de l'équateur avec le méridien de Greenwich.
- L'axe $\mathbf{e}_y^{\text{TRS}}$ se trouve dans le plan de l'équateur et est perpendiculaire aux 2 autres vecteurs de base.
- L'axe $\mathbf{e}_z^{\text{TRS}}$ est parallèle à l'axe de rotation de la Terre.

$$\mathbf{x}^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Puisqu'il s'agit d'un système standard, l'origine et les vecteurs de base sont les suivants :

$$\mathbf{o}^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

A partir des vecteurs de base, on peut former la matrice de transformation qui est en fait une matrice unitaire :

$$\mathbf{T}^{\text{TRS}} = (\mathbf{e}_x^{\text{TRS}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{TRS}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{TRS}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

Dans ce rapport, si un vecteur est exprimé sans exposant, cela signifie qu'il est exprimé dans le système TRS.

9.2 Système topo

Le système topo est un système de coordonnées topocentriques ellipsoïdales. Il est important de préciser que le système topocentrique utilisé dans ce projet n'est pas tout-à-fait le même que le système topocentrique traditionnel tel que décrit dans les supports de cours (Guillaume, 2021). En effet, les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y ont été inversés dans ce projet afin de ne pas avoir de système main gauche. C'est donc un système main droite, qui dépend de la position sur Terre et qui est attaché à la plateforme avec son origine confondue avec l'origine du système de la plateforme. Cela permet d'éviter une translation entre les 2 systèmes. Ainsi, les vecteurs de base sont définis de la façon suivante :

- L'origine \mathbf{o}^{topo} se trouve au centre du système de la plateforme et correspond au centre de phase de l'antenne GNSS qui s'y trouve. Elle est donc confondue avec l'origine du système body.
- L'axe $\mathbf{e}_x^{\text{topo}}$ pointe en direction de l'est topocentrique du plan horizontal local.
- L'axe $\mathbf{e}_y^{\text{topo}}$ pointe en direction du nord topocentrique du plan horizontal local.
- L'axe $\mathbf{e}_z^{\text{topo}}$ pointe en direction du zénith topocentrique local.

$$\mathbf{x}^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Les vecteurs de base exprimés dans le système topocentrique sont les mêmes que ceux du système standard :

$$\mathbf{o}^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Les vecteurs de base exprimés dans le système TRS sont les suivants :

$$\mathbf{o}^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} x_0^{\text{TRS}} \\ y_0^{\text{TRS}} \\ z_0^{\text{TRS}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

Ce qui donne la matrice de transformation suivante :

$$\mathbf{T}^{\text{topo}} = (\mathbf{e}_x^{\text{topo}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{topo}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{topo}}) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Il est utile de préciser qu'il s'agit d'un système topocentrique ellipsoïdal et se réfère ainsi à la normale à l'ellipsoïde et non pas à la verticale locale par rapport au géoïde. Par ce choix, la déviation de la verticale n'est pas prise en compte puisque la surface de référence est un ellipsoïde de révolution et non pas le géoïde.

Pour être tout-à-fait rigoureux et pouvoir définir des angles d'attitude directement liés au géoïde, il faudrait utiliser un système topocentrique astronomique.

9.3 Système body

Le système de coordonnées body est un système main droite, attaché à la plateforme. Ce système ne varie pas dans le temps et est défini une fois pour toutes, de la façon suivante :

- L'origine \mathbf{o}^{body} correspond au centre de phase de l'antenne GNSS principale (antenne 1) qui peut se trouver au centre ou dans un coin de la plateforme. L'emplacement de l'origine de ce système n'est pas prépondérant et il pourrait très bien se trouver virtuellement au centre de gravité de toutes les antennes de la plateforme.
- L'axe $\mathbf{e}_x^{\text{body}}$ pointe vers la droite de la plateforme (perpendiculaire aux deux autres axes).
- L'axe $\mathbf{e}_y^{\text{body}}$ pointe vers le devant de la plateforme (généralement dans le sens de la trajectoire).
- L'axe $\mathbf{e}_z^{\text{body}}$ pointe vers le haut de la plateforme (perpendiculaire au plan de la plateforme).

$$\mathbf{x}^{\text{body}} = \begin{pmatrix} x^{\text{body}} \\ y^{\text{body}} \\ z^{\text{body}} \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Les vecteurs de base exprimés dans le système de la plateforme sont les suivants :

$$\mathbf{o}^{\text{body}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{body}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

L'origine du système body correspond au topocentre dans le système topo :

$$\mathbf{o}^{\text{body}} = \begin{pmatrix} x_0^{\text{topo}} \\ y_0^{\text{topo}} \\ z_0^{\text{topo}} \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

On peut également exprimer les vecteurs de base dans le système topo, en formant un repère local parallèle à la trajectoire, à partir de la position du topocentre entre deux époques successives. Ce repère est une version modifiée du repère de Frenet et est inspiré de (Guillaume, 2015). Il est important de noter que ce repère ne permet pas d'avoir de rotation autour de l'axe y.

Si la plateforme est immobile, on peut également calculer ce repère en créant une ligne de base entre les antennes 1 (située au topocentre) et 2 (en admettant que la ligne de base est parallèle à l'axe y de la plateforme).

$$\mathbf{e}_y^{\text{body}} = \frac{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{topo}} - \mathbf{x}_i^{\text{topo}}}{|\mathbf{x}_{i+1}^{\text{topo}} - \mathbf{x}_i^{\text{topo}}|} \quad (9.11)$$

Si l'on crée le repère à partir des antennes 1 (topocentre) et 2, le vecteur de base $\mathbf{e}_y^{\text{body}}$ devient :

$$\mathbf{e}_y^{\text{body}} = \frac{\mathbf{x}_2^{\text{topo}} - \mathbf{x}_1^{\text{topo}}}{|\mathbf{x}_2^{\text{topo}} - \mathbf{x}_1^{\text{topo}}|} = \frac{\mathbf{x}_2^{\text{topo}} - \mathbf{x}_0^{\text{topo}}}{|\mathbf{x}_2^{\text{topo}} - \mathbf{x}_0^{\text{topo}}|} = \frac{\mathbf{x}_2^{\text{topo}}}{|\mathbf{x}_2^{\text{topo}}|} \quad (9.12)$$

Les vecteurs de base $\mathbf{e}_x^{\text{body}}$ et $\mathbf{e}_z^{\text{body}}$ se calculent comme suit :

$$\mathbf{e}_x^{\text{body}} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}}|} \quad (9.13)$$

$$\mathbf{e}_z^{\text{body}} = \mathbf{e}_x^{\text{body}} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad (9.14)$$

Avec :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

On peut alors former la matrice de transformation :

$$\mathbf{T}^{\text{body}} = (\mathbf{e}_x^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}}) \quad (9.16)$$

9.4 Système IMU

Le système de coordonnées **IMU** de la centrale inertielle est un système main droite, fixé sur la plateforme. Ce système n'est pas parallèle au système **body**, car ses axes sont définis de la façon suivante :

- L'axe $\mathbf{e}_x^{\text{IMU}}$ pointe vers le devant de la plateforme (généralement dans le sens de la trajectoire). Cet axe correspond à l'axe $\mathbf{e}_y^{\text{body}}$ du système **body**.
- L'axe $\mathbf{e}_y^{\text{IMU}}$ pointe vers la gauche de la plateforme (perpendiculaire aux deux autres axes). Cet axe est l'opposé de l'axe $\mathbf{e}_x^{\text{body}}$ du système **body**.
- L'axe $\mathbf{e}_z^{\text{IMU}}$ pointe vers le haut de la plateforme (perpendiculaire au plan de la plateforme). Il est parallèle à l'axe $\mathbf{e}_z^{\text{body}}$ du système **body**.

Les mesures gyroscopiques de la centrale inertielle déterminent des angles par rapport à un système topocentrique astronomique, puisque le gyroscope est directement lié à la verticale locale par rapport au géoïde. Dans ce projet, la déviation de la verticale n'est toutefois pas prise en compte.

9.5 Matrice de rotation (attitude)

Une matrice de rotation peut être paramétrisée de plusieurs façons différentes. Dans ce travail, 2 paramétrisations ont été utilisées :

- Selon 3 angles
- Selon un quaternion unitaire

Les angles d'attitude sont les angles qui permettent de passer du système **body** au système **topo**. L'exemple de la figure 6 correspond à un angle $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ négatif (environ -30°) autour de l'axe $\mathbf{e}_z^{\text{body}}$ puisque pour passer du système **body** au système **topo**, on doit tourner ici dans le sens horaire, alors que le sens mathématique positif des angles est le sens anti-horaire.

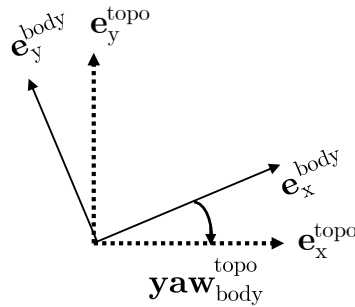


FIGURE 6 – Angle d'attitude yaw entre le système **body** et le système **topo**

9.5.1 Paramétrisation selon 3 angles

Pour les angles d'attitude, la convention utilisée est la suivante :

- Rotation autour de l'axe x :

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

- Rotation autour de l'axe y :

$$\mathbf{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

- Rotation autour de l'axe z :

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

La matrice de rotation $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ se calcule de la façon suivante :

$$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \mathbf{R}_z(y_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{R}_y(p_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{R}_x(r_{\text{body}}^{\text{topo}}) \quad (9.20)$$

$$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \begin{pmatrix} \cos y \cdot \cos p & \cos y \cdot \sin p \cdot \sin r - \sin y \cdot \cos r & \cos y \cdot \sin p \cdot \cos r + \sin y \cdot \sin r \\ \sin y \cdot \cos p & \sin y \cdot \sin p \cdot \sin r + \cos y \cdot \cos r & \sin y \cdot \sin p \cdot \cos r - \cos y \cdot \sin r \\ -\sin p & \cos p \cdot \sin r & \cos p \cdot \cos r \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

$y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ est l'angle autour de l'axe $\mathbf{e}_z^{\text{body}}$, $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ est l'angle autour de l'axe $\mathbf{e}_y^{\text{body}}$ et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$ est l'angle autour de l'axe $\mathbf{e}_x^{\text{body}}$. Il est à noter que les angles sont nommés y , p et r , mais ne doivent pas être confondus avec les angles de lacet, tangage et roulis que l'on retrouve dans la littérature mais qui suivent d'autres conventions.

On peut retrouver les angles à partir de la matrice de rotation de la façon suivante (formules adaptées de (Willi, 2019)) :

$$\text{Si } |\mathbf{R}_{31}| \neq 1 : \begin{cases} y = \text{atan2}(\mathbf{R}_{21}, \mathbf{R}_{11}) \\ p = -\arcsin(\mathbf{R}_{31}) \\ r = \text{atan2}(\mathbf{R}_{32}, \mathbf{R}_{33}) \end{cases} \quad (9.22)$$

$$\text{Si } |\mathbf{R}_{31}| = 1 : \begin{cases} y = \text{atan2}(-\mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{22}) \\ p = -\arcsin(\mathbf{R}_{31}) \\ r = 0 \end{cases} \quad (9.23)$$

Pour pouvoir comparer les angles issus de la matrice de rotation avec les angles issus du calcul d'attitude par GNSS, il est important d'être dans le même référentiel angulaire. Ainsi, on applique les mêmes formules pour retrouver les angles à partir de la matrice de rotation, mais l'angle autour de l'axe x de la plateforme ($r_{\text{body}}^{\text{topo}}$) correspond à l'opposé de l'angle autour de l'axe y de la centrale inertielle (p^{IMU}) et l'angle autour de l'axe y de la plateforme ($p_{\text{body}}^{\text{topo}}$) correspond à l'angle autour de l'axe x (r^{IMU}) de la centrale inertielle.

$$y_{\text{body}}^{\text{topo}} = y^{\text{IMU}} \quad (9.24)$$

$$p_{\text{body}}^{\text{topo}} = r^{\text{IMU}} \quad (9.25)$$

$$r_{\text{body}}^{\text{topo}} = -p^{\text{IMU}} \quad (9.26)$$

En réalité, il faudrait appliquer une matrice de rotation entre le système IMU et le système body et ne pas passer par cette méthode pas forcément très rigoureuse. Toutefois, dans le projet, c'est cette méthode qui a été implémentée. Elle n'est utilisée que pour la comparaison des résultats avec les angles IMU et n'intervient donc pas dans les algorithmes principaux.

9.5.2 Paramétrisation selon un quaternion unitaire

Un moyen d'exprimer une rotation en trois dimensions est d'utiliser un quaternion unitaire. En effet, la matrice de rotation s'obtient de la façon suivante (Guillaume, 2021) :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

Pour retrouver les composantes du quaternion unitaire à partir de la matrice de rotation, il est nécessaire de calculer tout d'abord l'axe et l'angle de rotation comme si on était dans le cas d'une matrice de rotation paramétrisée par un axe fixe et un angle de rotation :

1. Calcul de l'angle de rotation α :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{22} + \mathbf{R}_{33} - 1}{2}\right) \quad (9.28)$$

2. Calcul de l'axe de rotation \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{23} - \mathbf{R}_{32} \\ \mathbf{R}_{31} - \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{12} - \mathbf{R}_{21} \end{pmatrix} \quad (9.29)$$

3. Calcul des éléments du quaternion unitaire (le vecteur \mathbf{n} doit être normalisé) :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ n_x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \\ n_y \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \\ n_z \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (9.30)$$

Les angles d'attitude se trouvent à partir de la matrice de rotation à l'aide des équations (9.22) et (9.23).

9.6 Transformations entre systèmes

La formule générale pour passer d'un système à un autre est la suivante (Guillaume, 2021) :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{\text{II}})^T \cdot (\mathbf{o}^{\text{I}} - \mathbf{o}^{\text{II}}) + (\mathbf{T}^{\text{II}})^T \cdot \mathbf{T}^{\text{I}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad (9.31)$$

Avec :

$\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix}$ Coordonnées d'un point dans le système de destination

$\begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix}$ Coordonnées d'un point dans le système de départ

\mathbf{o}^{I} Origine du système de départ

\mathbf{o}^{II} Origine du système de destination

\mathbf{T}^{I} Matrice de transformation du système de départ

\mathbf{T}^{II} Matrice de transformation du système de destination

Cette équation peut également s'écrire sous cette forme :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = \mathbf{t}_I^{\text{II}} + \mathbf{R}_I^{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad (9.32)$$

Avec :

\mathbf{t}_I^{II} Translation pour passer du système de départ au système de destination

\mathbf{R}_I^{II} Matrice de rotation pour passer du système de départ au système de destination

9.6.1 Transformation body \rightarrow topo

$$\mathbf{x}^{\text{topo}} = \mathbf{t}_{\text{body}}^{\text{topo}} + \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{x}^{\text{body}} \quad (9.33)$$

Avec :

$$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(r_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, y_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \mathbf{R}_z(y_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{R}_y(p_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{R}_x(r_{\text{body}}^{\text{topo}}) \quad (9.34)$$

\mathbf{x}^{topo} Position du point dans le système topo

$\mathbf{t}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ Centre du système body exprimé en coordonnées topo

$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ Matrice de rotation pour passer du système body au système topo

\mathbf{x}^{body} Position du point dans le système body

Le centre du système body et le centre du système topo sont confondus :

$$\mathbf{t}_{\text{body}}^{\text{topo}} = 0 \quad (9.35)$$

On peut alors simplifier l'équation :

$$\mathbf{x}^{\text{topo}} = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{x}^{\text{body}} \quad (9.36)$$

9.6.2 Transformation topo \rightarrow body

$$\mathbf{x}^{\text{body}} = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}})^T \cdot (\mathbf{x}^{\text{topo}} - \mathbf{t}_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}})^T \cdot \mathbf{x}^{\text{topo}} \quad (9.37)$$

Pour passer du système topo au système body, on utilise la matrice transposée $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}T}$.

9.6.3 Transformation topo \rightarrow TRS

$$\mathbf{x}^{\text{TRS}} = \mathbf{t}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} \cdot \mathbf{x}^{\text{topo}} = \mathbf{x}_0^{\text{TRS}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} \cdot \mathbf{x}^{\text{topo}} \quad (9.38)$$

Avec :

$$\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

- \mathbf{x}^{TRS} Position du point dans le système TRS (WGS84)
- $\mathbf{t}_{\text{topo}}^{\text{TRS}}, \mathbf{x}_0^{\text{TRS}}$ Centre du système topo (topocentre) exprimé en coordonnées TRS (WGS84)
- φ, λ Coordonnées ellipsoïdales WGS84 du topocentre
- \mathbf{x}^{topo} Position du point dans le système topo

9.6.4 Transformation TRS \rightarrow topo

$$\mathbf{x}^{\text{topo}} = \mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} \cdot (\mathbf{x}^{\text{TRS}} - \mathbf{t}_{\text{topo}}^{\text{TRS}}) = \mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} \cdot (\mathbf{x}^{\text{TRS}} - \mathbf{x}_0^{\text{TRS}}) \quad (9.40)$$

Avec :

$$\mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} = \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}T} \quad (9.41)$$

9.6.5 Transformation body \rightarrow TRS

$$\mathbf{x}^{\text{TRS}} = \mathbf{x}_0^{\text{TRS}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{x}^{\text{body}} \quad (9.42)$$

9.6.6 Transformation TRS \rightarrow body

$$\mathbf{x}^{\text{body}} = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}})^T \cdot \mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} \cdot (\mathbf{x}^{\text{TRS}} - \mathbf{x}_0^{\text{TRS}}) \quad (9.43)$$

9.6.7 Transformation WGS84 ellipsoïdales $(\lambda, \varphi, h) \rightarrow$ WGS84 cartésiennes $(x^{\text{TRS}}, y^{\text{TRS}}, z^{\text{TRS}})$

Pour passer des coordonnées WGS84 ellipsoïdales aux coordonnées WGS84 cartésiennes géocentriques, on applique la méthode suivante (Guillaume, 2021) :

1. Calcul du rayon de courbure de la section normale à l'ellipsoïde

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot (\sin \varphi)^2}} \quad (9.44)$$

Où :

$$b = a - a \cdot f \quad (9.45)$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (9.46)$$

Avec :

- R_N Rayon de courbure de la section normale à l'ellipsoïde [m]
- a Demi-grand axe de l'ellipsoïde [m]
- b Demi-petit axe de l'ellipsoïde [m]
- f Aplatissement de l'ellipsoïde [-]
- e Excentricité de l'ellipsoïde [-]

2. Calcul des coordonnées cartésiennes géocentriques

$$x^{\text{TRS}} = (RN + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \quad (9.47)$$

$$y^{\text{TRS}} = (RN + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \quad (9.48)$$

$$z^{\text{TRS}} = (RN \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi \quad (9.49)$$

9.6.8 Transformation WGS84 cartésiennes (x,y,z) → WGS84 ellipsoïdales (λ, φ, h)

Les formules de transformation ne sont pas démontrées dans ce rapport. Le lecteur intéressé peut se référer au document (Guillaume, 2021) duquel sont tirées les formules.

$$\lambda = \text{atan2}(y, x) \quad (9.50)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N + h} \cdot e^2} \right) \quad (9.51)$$

Avec :

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - R_N \quad (9.52)$$

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (9.53)$$

La hauteur ellipsoïdale ainsi que la latitude φ sont calculées par un calcul itératif.

$$\begin{cases} h_i = 0 \\ h_{i-1} = 1 \\ R_{N_i} = 1 \end{cases} \quad (9.54)$$

Étapes de l'itération, tant que $|h_i - h_{i-1}| > 0.000001$:

$$h_{i-1} = h_i \quad (9.55)$$

$$\varphi_i = \text{atan2} \left[z, \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(1 - \frac{R_{N_i}}{R_{N_i} + h_i} \cdot e^2 \right) \right] \quad (9.56)$$

$$R_{N_i} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_i}} \quad (9.57)$$

$$h_i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi_i} - R_{N_i} \quad (9.58)$$

9.7 Exemple numérique

L'exemple numérique ci-dessous permet de comprendre comment et dans quel ordre les formules de transformation s'appliquent pour passer des coordonnées WGS84 ellipsoïdales aux coordonnées topocentriques et de trouver des coordonnées topocentriques à partir des coordonnées body et de la matrice de rotation entre le système body et le système topo.

1. Récupération des coordonnées WGS84 ellipsoïdales :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\text{WGS84}} \\ \varphi_{\text{WGS84}} \\ h_{\text{WGS84}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +6.655333^\circ \\ +46.779168^\circ \\ +450.000\text{m} \end{pmatrix} \quad (9.59)$$

2. Transformation en coordonnées WGS84 cartésiennes géocentriques :
Les éléments de l'ellipsoïde GRS80 sont les suivants :

$$b = a - a \cdot f = 6378137.000 - 6378137.000 \cdot \frac{1}{298.257222101} = 6356752.3141 \quad (9.60)$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{6378137.000^2 - 6356752.3141^2}}{6378137.000} = 0.081819191 \quad (9.61)$$

Rayon de courbure de la section normale à l'ellipsoïde :

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot (\sin \varphi)^2}} = \frac{6378137.000}{\sqrt{1 - 0.081819191^2 \cdot (\sin 46.779168^\circ)^2}} = 6389504.240 \quad (9.62)$$

Calcul des coordonnées cartésiennes géocentriques :

$$x = (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda = (6389504.240 + 450.000) \cdot \cos 46.779168^\circ \cdot \cos 6.655333^\circ = 4346430.021 \quad (9.63)$$

$$y = (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda = (6389504.240 + 450.000) \cdot \cos 46.779168^\circ \cdot \sin 6.655333^\circ = 507153.317 \quad (9.64)$$

$$z = (R_N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi = (6389504.240 \cdot (1 - 0.081819191^2) + 450.000) \cdot \sin 46.779168^\circ = 4625315.364 \quad (9.65)$$

$$\mathbf{x}^{\text{WGS84}} = \begin{pmatrix} 4346430.021 \\ 507153.317 \\ 4625315.364 \end{pmatrix} \quad (9.66)$$

3. Transformation en coordonnées topocentriques :

Pour calculer des coordonnées topocentriques, il est nécessaire de connaître le topocentre en coordonnées WGS84 cartésiennes. Ce point se trouve à l'origine du système topocentrique. Dans le cas ci-dessous, on admet que le point calculé précédemment se trouve au topocentre.

$$\mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} = \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}T} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.67)$$

$$\mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} -\sin(6.655333) & \cos(6.655333) & 0 \\ -\sin(46.779168) \cos(6.655333) & -\sin(46.779168) \sin(6.655333) & \cos(46.779168) \\ \cos(46.779168) \cdot \cos(6.655333) & \cos(46.779168) \cdot \sin(6.655333) & \sin(46.779168) \end{pmatrix} \quad (9.68)$$

$$\mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} -0.115896 & +0.993261 & +0.000000 \\ -0.723809 & -0.084456 & +0.68481 \\ +0.680197 & +0.079367 & +0.728720 \end{pmatrix} \quad (9.69)$$

La formule pour passer du système TRS au système topocentrique est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_o^{\text{TRS}} \\ y_o^{\text{TRS}} \\ z_o^{\text{TRS}} \end{pmatrix} \right] \quad (9.70)$$

Le topocentre se trouve logiquement à l'origine du système topo :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.115896 & +0.993261 & +0.000000 \\ -0.723809 & -0.084456 & +0.68481 \\ +0.680197 & +0.079367 & +0.728720 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4346430.021 \\ 507153.317 \\ 4625315.364 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4346430.021 \\ 507153.317 \\ 4625315.364 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} +0.000 \\ +0.000 \\ +0.000 \end{pmatrix} \quad (9.71)$$

En supposant qu'il s'agit de la coordonnée de l'antenne principale, il est possible de déterminer les coordonnées des antennes secondaires dans le système topo. Mais tout d'abord on peut calculer la matrice de rotation pour passer du système body au système topo en admettant une rotation de 30° autour de l'axe \mathbf{e}_x dans le système body ($y_{\text{body}}^{\text{topo}} = 30^\circ$).

$$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(+30.0, 0.0, 0.0) = \begin{pmatrix} +0.8660 & -0.5000 & +0.0000 \\ +0.5000 & +0.8660 & +0.0000 \\ +0.0000 & +0.0000 & +1.0000 \end{pmatrix} \quad (9.72)$$

On connaît les coordonnées des antennes dans le système body et on aimerait les calculer dans le système topo. Ainsi, on peut utiliser la formule suivante :

$$\mathbf{x}^{\text{topo}} = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) \cdot \mathbf{x}^{\text{body}} \quad (9.73)$$

$$\mathbf{x}_1^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} +0.8660 & -0.5000 & +0.0000 \\ +0.5000 & +0.8660 & +0.0000 \\ +0.0000 & +0.0000 & +1.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.0000 \\ +1.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3660 \\ +0.3660 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (9.74)$$

Connaissant les coordonnées dans le système topo, on peut calculer les coordonnées des points dans le système TRS :

$$\mathbf{x}^{\text{TRS}} = \mathbf{x}_0^{\text{TRS}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} \cdot \mathbf{x}^{\text{topo}} \quad (9.75)$$

$$\mathbf{x}^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 4346430.021 \\ 507153.317 \\ 4625315.364 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.115896 & -0.723809 & +0.680197 \\ +0.993261 & -0.084456 & +0.079367 \\ +0.00000 & +0.68481 & +0.728720 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.3660 \\ +0.3660 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 434630.822 \\ 507152.153 \\ 4625315.416 \end{pmatrix} \quad (9.76)$$

9.8 Système temporel

Lorsque l'on travaille avec des données GNSS, il est important de savoir quel est le système temporel de référence. De plus, chaque système GNSS a son propre référentiel de temps. Dans ce projet, le système temporel de référence est celui du GPS puisque l'on travaille essentiellement avec des données de cette constellation de satellites. Il est toutefois utile de rappeler quels sont les systèmes que l'on peut rencontrer et quels sont les liens entre eux. Ces informations sont tirées de (Guillaume, 2022a) et de (J. Sanz Subirana and Hernández-Pajares, 2011c).

1. Temps atomique international (TAI) :

Le temps TAI est basé sur un réseau d'horloges atomiques très précises et ne varie pas dans le temps.

2. Temps universel (UT1) :

Le temps universel est lié à la rotation de la Terre et évolue au fil du temps. Ce n'est donc pas une échelle de temps uniforme.

3. Temps universel coordonné (UTC) :

Il s'agit du système le plus répandu et dans lequel s'exprime le temps dans la vie quotidienne. Le temps UTC est le Temps Universel Coordonné et évolue en fonction de la variation de la rotation de la Terre. Il permet de faire le lien entre la rotation de la Terre et le temps atomique international, au moyen des secondes intercalaires. Le temps UTC est donc lié à la rotation de la Terre, mais garde la précision du temps atomique international. Il ne diffère jamais de plus de 0.9 seconde du temps UT1 grâce à l'introduction de secondes intercalaires.

Ainsi :

$$\text{UTC} = \text{TAI} - \text{Leap Seconds} \quad (9.77)$$

Actuellement, la différence entre le temps UTC et le temps TAI est de 37 secondes.

4. Temps GPS :

Le temps GPS est une échelle de temps continue basée sur des horloges atomiques sur Terre dans les stations de contrôle ainsi que dans les satellites. Le temps GPS a débuté à 0h00 dans la nuit du 5 au 6 janvier 1980, alors que la différence entre le temps UTC et le temps TAI était de 19 secondes. Le temps GPS est synchronisé avec le temps UTC au pire à 1 microseconde, mais est actuellement synchronisé à environ 25 ns.

$$\text{GPST} - \text{UTC} = \text{Leap Seconds} - 19 = 37 - 19 = 18 \quad (9.78)$$

Actuellement, la différence entre le temps GPS et le temps UTC est de 18 secondes, mais cela varie lors de chaque introduction de seconde intercalaire. Le temps GPS s'exprime habituellement en semaines GPS et en secondes de semaine GPS. Ainsi, la semaine GPS correspond au nombre de semaines écoulées depuis l'introduction du temps GPS et la seconde de semaine correspond au nombre de secondes écoulées depuis le début de la semaine GPS qui débute chaque dimanche à 0h00.

5. Temps GLONASS :

Le temps GLONASS est une échelle de temps non-continue, basée sur le temps UTC (avec un décalage de 3h pour se caler sur l'heure de Moscou). Elle tient directement compte des secondes intercalaires.

$$\text{GLONASST} = \text{UTC} + 3\text{h} - \tau \quad (9.79)$$

Avec :

$$\tau \text{ Erreur de synchronisation (inférieure à 1 ms)}$$

6. Temps Galileo et temps Beidou :

Le temps Galileo et le temps Beidou sont similaires au temps GPS. La seule différence est l'époque de départ et la précision de synchronisation. Ainsi, le temps Galileo débute 13 secondes avant le 22 août 1999 à UTC 0h00 et est synchronisé avec le temps TAI à environ 50 ns alors que le temps Beidou commence le 1 janvier 2006 à UTC 0h00 et est synchronisé avec le temps UTC à 100 ns.

9.8.1 Transformation date calendaire en date julienne modifiée

Les dates du calendrier grégorien telles que nous les utilisons dans la vie quotidienne ne sont pas pratiques à utiliser dans les calculs. Ainsi, il est nécessaire de transformer ces dates en dates juliennes, puis en dates juliennes modifiées. L'avantage de la date julienne est de pouvoir exprimer une date à l'aide d'un seul nombre, sans devoir se préoccuper des années bissextiles. L'algorithme de transformation a été repris de (Guillaume, 2022a).

Pour passer d'une date grégorienne (année (Y), mois (M), jour (D), heure (H), minute (MIN), seconde (S)) en date julienne, il convient de procéder selon les étapes décrites ci-dessous.

1. Détermination des valeurs Y et M :

$$\text{si } M \in \{1, 2\} : \begin{cases} Y = Y - 1 \\ M = M + 12 \end{cases} \quad (9.80)$$

$$\text{si } M \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} : \begin{cases} Y = Y \\ M = M \end{cases} \quad (9.81)$$

2. Calcul du jour en jour décimal :

$$D = j + \frac{h}{24} + \frac{\text{min}}{24 \cdot 60} + \frac{\text{sec}}{24 \cdot 3600} \quad (9.82)$$

3. Calcul du terme B (permet de tenir compte des années bissextiles) :

$$B = 2 - \text{floor}\left(\frac{Y}{100}\right) + \text{floor}\left(\frac{Y}{400}\right) \quad (9.83)$$

4. Calcul de la date julienne décimale :

$$\text{DJD} = \text{floor}(365.25 \cdot (Y + 4716)) + \text{floor}(30.6001 \cdot (M + 1)) + D + B - 1524.5 \quad (9.84)$$

5. Calcul du jour julien :

$$\text{JD}_{\text{day}} = \text{floor}(\text{DJD}) \quad (9.85)$$

6. Calcul de la fraction de jour julien :

$$\text{JD}_{\text{part of day}} = \frac{h}{24} + \frac{\text{min}}{24 \cdot 60} + \frac{\text{sec}}{24 \cdot 3600} \quad (9.86)$$

7. Calcul de la seconde de jour julien :

$$\begin{cases} \text{JD}_{\text{sec of day}} = 12 \cdot 3600 + h \cdot 3600 + \text{min} \cdot 60 + \text{sec} & \text{si } \text{JD}_{\text{part of day}} < 0.5 \\ \text{JD}_{\text{sec of day}} = -12 \cdot 3600 + h \cdot 3600 + \text{min} \cdot 60 + \text{sec} & \text{si } \text{JD}_{\text{part of day}} > 0.5 \end{cases} \quad (9.87)$$

8. Calcul de la date julienne modifiée :

Puisque les dates juliennes sont très grandes, il est préférable d'utiliser les dates juliennes modifiées.

$$\text{MJD}_{\text{day}} = \text{floor}\left(\text{JD}_{\text{day}} + \frac{\text{JD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} - 2400000.5\right) \quad (9.88)$$

$$\begin{cases} \text{MJD}_{\text{sec of day}} = \text{JD}_{\text{sec of day}} - 12 \cdot 3600 & \text{si } \text{JD}_{\text{sec of day}} \geq 43200 \\ \text{MJD}_{\text{sec of day}} = \text{JD}_{\text{sec of day}} + 12 \cdot 3600 & \text{si } \text{JD}_{\text{sec of day}} < 43200 \end{cases} \quad (9.89)$$

Ces formules sont illustrées ci-dessous au moyen d'un exemple numérique, à savoir la transformation de la date du 19 février 2022 à 14h 15min 10sec :

$$Y = 2022 \quad M = 2 \quad j = 19 \quad h = 14 \quad \text{min} = 15 \quad \text{sec} = 10$$

1. Détermination des valeurs Y et M :

$$\text{si } M \in \{1, 2\} : \begin{cases} Y = Y - 1 = 2022 - 1 = 2021 \\ M = M + 12 = 2 + 12 = 14 \end{cases}$$

2. Calcul du jour en jour décimal :

$$D = j + \frac{h}{24} + \frac{\text{min}}{24 \cdot 60} + \frac{\text{sec}}{24 \cdot 3600} = 19 + \frac{14}{24} + \frac{15}{24 \cdot 60} + \frac{10}{24 \cdot 3600} = 19.59386574$$

3. Calcul du terme B :

$$B = 2 - \text{floor}\left(\frac{Y}{100}\right) + \text{floor}\left(\frac{Y}{400}\right) = 2 - \text{floor}\left(\frac{2021}{100}\right) + \text{floor}\left(\frac{2021}{400}\right) = 2 - 20 + 5 = -13$$

4. Calcul de la date julienne décimale :

$$\begin{aligned} \text{DJD} &= \text{floor}(365.25 \cdot (Y + 4716)) + \text{floor}(30.6001 \cdot (M + 1)) + D + B - 1524.5 \\ &= \text{floor}(365.25 \cdot (2021 + 4716)) + \text{floor}(30.6001 \cdot (14 + 1)) + 19.59386574 - 13 - 1524.5 \\ &= 2460689 + 459 + 19.59386574 - 13 - 1524.5 \\ &= 2459630.094 \end{aligned}$$

5. Calcul du jour julien :

$$\text{JD}_{\text{day}} = \text{floor}(\text{DJD}) = \text{floor}(2459630.094) = 2459630$$

6. Calcul de la fraction de jour julien :

$$\text{JD}_{\text{part of day}} = \frac{h}{24} + \frac{\text{min}}{24 \cdot 60} + \frac{\text{sec}}{24 \cdot 3600} = \frac{14}{24} + \frac{15}{24 \cdot 60} + \frac{10}{24 \cdot 3600} = 0.59386574$$

7. Calcul de la seconde de jour julien :

$$\text{JD}_{\text{sec of day}} = -12 \cdot 3600 + h \cdot 3600 + \text{min} \cdot 60 + \text{sec} = \text{JD}_{\text{part of day}} = -12 \cdot 3600 + 14 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 + 10 = 8110$$

8. Calcul de la date julienne modifiée :

$$\begin{aligned} \text{MJD}_{\text{day}} &= \text{floor}\left(\text{JD}_{\text{day}} + \frac{\text{JD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} - 2400000.5\right) \\ &= \text{floor}\left(2459630 + \frac{8110}{24 \cdot 3600} - 2400000.5\right) \\ &= \text{floor}(59629.594) \\ &= \mathbf{59629} \\ \text{MJD}_{\text{sec of day}} &= 8110 + 12 \cdot 3600 = \mathbf{51310} \end{aligned}$$

9.8.2 Transformation date julienne modifiée en date calendaire

A partir de la date julienne modifiée, il est possible de retrouver la date calendaire correspondante. Pour cela, il est nécessaire d'effectuer les calculs suivants :

1. Transformation de la date julienne modifiée en jour julien :

$$\text{JD}_{\text{day}} = \text{floor} \left(\text{MJD}_{\text{day}} + \frac{\text{MJD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} + 2400000.5 \right) \quad (9.90)$$

2. Calcul de la seconde de jour julien :

$$\begin{cases} \text{JD}_{\text{sec of day}} = \text{MJD}_{\text{sec of day}} - 12 \cdot 3600 & \text{si } \text{MJD}_{\text{sec of day}} \geq 43200 \\ \text{JD}_{\text{sec of day}} = \text{MJD}_{\text{sec of day}} + 12 \cdot 3600 & \text{si } \text{MJD}_{\text{sec of day}} < 43200 \end{cases} \quad (9.91)$$

3. Calcul de la date julienne décimale :

$$\text{DJD} = \text{JD}_{\text{day}} + \frac{\text{JD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} + 0.5 \quad (9.92)$$

4. Calcul du jour julien :

$$\text{JD} = \text{floor}(\text{DJD}) \quad (9.93)$$

5. Calcul de l'heure décimale (le reste de la division entière de $\text{JD}_{\text{sec of day}}$ par 1 et multiplié par 24 heures) :

$$\text{Dh} = \text{fmod} \left(\frac{\text{JD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} + 0.5, 1 \right) \cdot 24 \quad (9.94)$$

6. Calcul de l'heure entière :

$$h = \text{floor}(\text{Dh}) \quad (9.95)$$

7. Calcul de la minute entière :

$$\text{min} = \text{floor}((\text{Dh} - h) \cdot 60) \quad (9.96)$$

8. Calcul de la seconde décimale :

$$\text{Dsec} = (\text{Dh} - h - \frac{\text{min}}{60}) \cdot 3600 \quad (9.97)$$

9. Initialisation des facteurs k et n :

$$k = \text{JD} + 68569 \quad (9.98)$$

$$n = \text{floor} \left(\frac{4 \cdot k}{146097} \right) \quad (9.99)$$

10. Mise à jour du facteur k et calcul du facteur m :

$$k = k - \text{floor} \left(\frac{146097 \cdot n + 3}{4} \right) \quad (9.100)$$

$$m = \text{floor} \left(\frac{4000 \cdot (k + 1)}{1461001} \right) \quad (9.101)$$

11. Mise à jour du facteur k :

$$k = k - \text{floor} \left(\frac{1461 \cdot m}{4} \right) + 31 \quad (9.102)$$

12. Calcul du mois et du jour :

$$\text{M} = \text{floor} \left(\frac{80 \cdot k}{2447} \right) \quad (9.103)$$

$$j = k - \text{floor} \left(\frac{2447 \cdot \text{M}}{80} \right) \quad (9.104)$$

13. Mise à jour du facteur k :

$$k = \text{floor} \left(\frac{\text{M}}{11} \right) \quad (9.105)$$

14. Calcul du mois et de l'année :

$$\text{M} = \text{M} + 2 - 12 \cdot k \quad (9.106)$$

$$Y = 100 \cdot (n - 49) + m + k \quad (9.107)$$

Exemple numérique :

1. Transformation de la date julienne modifiée en jour julien :

$$\begin{aligned} \text{JD}_{\text{day}} &= \text{floor} \left(\text{MJD}_{\text{day}} + \frac{\text{MJD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} + 2400000.5 \right) \\ &= \text{floor} \left(59629 + \frac{51310}{24 \cdot 3600} + 2400000.5 \right) \\ &= 2459630 \end{aligned}$$

2. Calcul de la seconde de jour julien :

$$\text{JD}_{\text{sec of day}} = \text{MJD}_{\text{sec of day}} - 12 \cdot 3600 = 51310 - 12 \cdot 3600 = 8110$$

3. Calcul de la date julienne décimale :

$$\text{DJD} = \text{JD}_{\text{day}} + \frac{\text{JD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} + 0.5 = 2459630 + \frac{8110}{24 \cdot 3600} + 0.5 = 2459630.594$$

4. Calcul du jour julien :

$$\text{JD} = \text{floor}(\text{DJD}) = \text{floor}(2459630.594) = 2459630$$

5. Calcul de l'heure décimale (le reste de la division entière de $\text{JD}_{\text{sec of day}}$ par 1 et multiplié par 24 heures) :

$$\text{Dh} = \text{fmod} \left(\frac{\text{JD}_{\text{sec of day}}}{24 \cdot 3600} + 0.5, 1 \right) \cdot 24 = \text{fmod} \left(\frac{8110}{24 \cdot 3600} + 0.5, 1 \right) \cdot 24 = 14.252778$$

6. Calcul de l'heure entière :

$$h = \text{floor}(\text{Dh}) = \text{floor}(14.252778) = \mathbf{14}$$

7. Calcul de la minute entière :

$$\text{min} = \text{floor}((\text{Dh} - h) \cdot 60) = \text{floor}((14.252778 - 14) \cdot 60) = \mathbf{15}$$

8. Calcul de la seconde décimale :

$$\text{Dsec} = (\text{Dh} - h - \frac{\text{min}}{60}) \cdot 3600 = (14.252778 - 14 - \frac{15}{60}) \cdot 3600 = \mathbf{10.000}$$

9. Initialisation des facteurs k et n :

$$k = \text{JD} + 68569 = 2459630 + 68569 = 2528199$$

$$n = \text{floor} \left(\frac{4 \cdot k}{146097} \right) = \text{floor} \left(\frac{4 \cdot 2528199}{146097} \right) = 69$$

10. Mise à jour du facteur k et calcul du facteur m :

$$k = k - \text{floor} \left(\frac{146097 \cdot n + 3}{4} \right) = 2528199 - \text{floor} \left(\frac{146097 \cdot 69 + 3}{4} \right) = 8025$$

$$m = \text{floor} \left(\frac{4000 \cdot (k + 1)}{1461001} \right) = \text{floor} \left(\frac{4000 \cdot (8025 + 1)}{1461001} \right) = 21$$

11. Mise à jour du facteur k :

$$k = k - \text{floor} \left(\frac{1461 \cdot m}{4} \right) + 31 = 8025 - \text{floor} \left(\frac{1461 \cdot 21}{4} \right) + 31 = 386$$

12. Calcul du jour :

$$M = \text{floor} \left(\frac{80 \cdot k}{2447} \right) = \text{floor} \left(\frac{80 \cdot 386}{2447} \right) = 12$$

$$j = k - 2447 \cdot \text{floor} \left(\frac{M}{80} \right) = 386 - \text{floor} \left(\frac{2447 \cdot 12}{80} \right) = \mathbf{19}$$

13. Mise à jour du facteur k :

$$k = \text{floor} \left(\frac{M}{11} \right) = \text{floor} \left(\frac{12}{11} \right) = 1$$

14. Calcul du mois et de l'année :

$$M = M + 2 - 12 \cdot k = 12 + 2 - 12 \cdot 1 = \mathbf{2}$$

$$Y = 100 \cdot (n - 49) + m + k = 100 \cdot (69 - 49) + 21 + 1 = \mathbf{2022}$$

10 Détermination d'attitude par GNSS

Quand on parle de positionnement GNSS, la question est de savoir *où* se trouve un point, mais quand on parle d'attitude, la question est plutôt de savoir comment une plateforme est *orientée* dans l'espace. La méthode présentée dans ce travail permet de calculer l'attitude directement à partir des mesures GNSS, sans avoir à effectuer de calculs intermédiaires. Pour pouvoir déterminer l'attitude d'une plateforme, il faut tout d'abord comprendre comment elle est paramétrisée. Les éléments de ce chapitre sont largement inspirés de (Willi, 2019) et de (Herrero Mártel, 2022).

10.1 Paramétrisation de l'attitude

L'attitude permet de décrire l'orientation 3D d'une plateforme dans l'espace, par rapport à un repère topocentrique. Le principe de base est de trouver la matrice de rotation qui permet de passer du système de la plateforme au système topocentrique.

$$\mathbf{b}_{AB}^{\text{topo}} = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}} \quad (10.1)$$

Avec :

- $\mathbf{b}_{AB}^{\text{topo}}$ Ligne de base entre les antennes A et B, exprimée dans le système topocentrique ellipsoïdal
- $\mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}$ Ligne de base entre les antennes A et B, exprimée dans le système de la plateforme
- $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ Matrice de rotation pour passer du système de la plateforme au système topocentrique ellipsoïdal

Dans ce projet, les lignes de base sont mesurées dans le système TRS et il est donc nécessaire d'ajouter la matrice de rotation entre le système topocentrique et le système TRS. Cette matrice de rotation dépend du lieu où l'on se trouve et peut être facilement calculée à partir de coordonnées approchées puisqu'elle ne varie que très peu à petite échelle.

$$\mathbf{b}_{AB}^{\text{TRS}} = \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}} \quad (10.2)$$

Avec :

- $\mathbf{b}_{AB}^{\text{TRS}}$ Ligne de base entre les antennes A et B, exprimée dans le système TRS
- $\mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}$ Ligne de base entre les antennes A et B, exprimée dans le système de la plateforme
- $\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}}$ Matrice de rotation pour passer du système topocentrique au système TRS
- $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ Matrice de rotation pour passer du système de la plateforme au système topocentrique ellipsoïdal

Les lignes de base dans le système de la plateforme sont déduites de la position des antennes sur la plateforme. Les lignes de base dans le système topocentrique sont calculées à partir des mesures GNSS dans le système TRS et transformées par la suite dans le système topocentrique. Comme le calcul des lignes de base doit être suffisamment précis pour trouver la matrice de rotation, il est nécessaire d'utiliser des mesures de phase. En effet, les mesures sur le code ne sont pas assez précises et ne permettraient pas de calculer les lignes de base avec une précision suffisante. La méthode généralement utilisée pour le calcul de lignes de base est le calcul différentiel sur la phase, en utilisant des observations de double-différence.

Avec une seule ligne de base, la matrice de rotation n'est pas définie et possède une infinité de solutions possibles. En effet, l'angle autour de l'axe formé par la ligne de base n'est pas déterminé, ce qui signifie qu'on ne connaît pas la rotation de la plateforme autour de cet axe. Pour pouvoir déterminer correctement la matrice de rotation, il est nécessaire d'avoir au moins 2 lignes de base non-colinéaires. Le cas idéal est d'avoir 2 lignes de base orthogonales. Puisqu'il faut 2 antennes pour former une ligne de base, il est nécessaire d'avoir au moins 3 antennes sur la plateforme.

La matrice de rotation doit être une matrice orthogonale de déterminant 1, ce qui implique que la matrice transposée est égale à la matrice inverse et que le produit de la matrice par sa transposée donne la matrice identité.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} \quad (10.3)$$

La recherche de cette matrice de rotation à partir d'observations vectorielles dans deux systèmes de référence différents est appelée le problème de Wahba. L'objectif est de trouver une matrice $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ qui minimise la fonction suivante (adaptée de (Willi, 2019)) :

$$L(\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \sum_k \sum_k \frac{1}{\sigma_{ik}^2} \cdot (r_{ik} - \mathbf{e}^{i^T} \cdot \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_k^{\text{body}})^2 \quad (10.4)$$

Avec :

- L Fonction de coût à minimiser
- σ_{ik} Bruit sur les observations
- r_{ik} Observation de différence de distance de la ligne de base k avec le satellite i (range difference)
- \mathbf{e}^{iT} Ligne de visée dans la direction du satellite
- $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ Matrice de rotation entre le système body et le système topo
- $\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}}$ Matrice de rotation entre le système topo et le système TRS
- $\mathbf{b}_k^{\text{body}}$ Ligne de base connue dans le système body

La figure 7 permet de visualiser les différents éléments avec la ligne de base k et le satellite i :

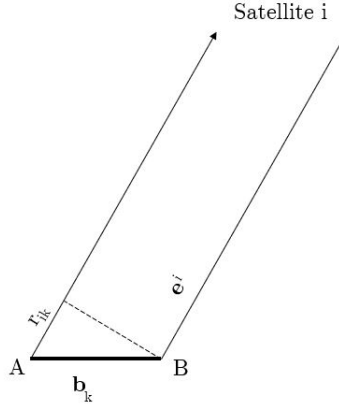


FIGURE 7 – Principe de la détermination d'attitude (inspiré de (Willi, 2019))

Dans la suite du travail, on exprimera ce problème plutôt sous la forme de la notation utilisée dans l'ajustement selon la méthode des moindres carrés de Gauss-Markov avec contraintes (voir chapitre 11).

10.2 Stratégies de détermination de l'attitude

Pour déterminer l'attitude d'une plateforme à partir de mesures GNSS, plusieurs stratégies sont possibles.

10.2.1 Méthode TRIAD

La méthode TRIAD (TRIaxial Attitude Determination)(Herrero Mártil, 2022) se base sur l'utilisation de 2 vecteurs de base orthogonaux (lignes de base).

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{b}_1 \quad (10.5)$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{b}_2 \quad (10.6)$$

Avec :

\mathbf{R} Matrice de rotation pour passer du système de référence au système body

\mathbf{r}_i Ligne de base (vecteur) dans le système de référence

\mathbf{b}_i Ligne de base (vecteur) dans le système body

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \quad (10.7)$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|} \quad (10.8)$$

La matrice de rotation peut se construire de deux manières :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{r}_1^T + \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{r}_3^T + (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_3) \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)^T \quad (10.9)$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{r}_2^T + \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{r}_3^T + (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)^T \quad (10.10)$$

10.2.2 Méthode FOAM

La méthode FOAM (Fast Optimal Attitude Matrix) (Herrero Mártil, 2022) est similaire à la méthode TRIAD, mais elle offre plus de liberté puisque l'on peut définir des poids différents pour les 2 lignes de base utilisées dans le calcul.

$$\mathbf{R} = \mathbf{b}_3 \mathbf{r}_3^T + \left(\frac{a_1}{\lambda}\right) [\mathbf{b}_1 \mathbf{r}_1^T + (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_3)(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3)^T] + \left(\frac{a_2}{\lambda}\right) [\mathbf{b}_2 \mathbf{r}_2^T + (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)^T] \quad (10.11)$$

Avec :

$$\lambda = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 [(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + |\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2| |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|]} \quad (10.12)$$

Les coefficients a_1 et a_2 permettent de donner des poids différents aux deux lignes de base. Ainsi, si une ligne de base est plus courte que l'autre, on peut lui attribuer un poids inférieur.

10.2.3 Calcul par moving-baseline et détermination des angles d'attitude par Helmert 3D

Le calcul par moving-baseline est un calcul de ligne de base entre deux récepteurs qui se déplacent. Ainsi, il est possible de déterminer la position relative du récepteur secondaire par rapport au récepteur principal à chaque époque, ce qui correspond en réalité directement aux coordonnées topocentriques du deuxième récepteur (si le récepteur principal se trouve au topocentre). En connaissant la ligne de base entre les deux récepteurs, il est possible d'en déduire l'attitude grâce à un calcul de Helmert 3D (estimation de 3 translations et 3 rotations entre le bloc formé par les points dans le premier système et celui formé par les points dans le deuxième système).

En effet, les coordonnées des récepteurs sont connues dans le système de la plateforme et mesurées dans le système TRS (puis transformées dans le système topo). A partir des coordonnées d'au moins trois récepteurs non-alignés, connues dans le système body et dans le système topo, on peut trouver les angles d'attitude. L'avantage du calcul de Helmert 3D par rapport aux précédentes méthodes est de pouvoir utiliser un nombre non-limité de lignes de base.

10.2.4 Estimation directe de l'attitude à partir des observations de double-différences

Toutes les méthodes décrites ci-dessus sont basées sur l'utilisation de vecteurs qui doivent être calculés au préalable à partir des mesures GNSS. Toutefois, il existe une autre solution qui utilise directement les observations brutes de phase GNSS et qui permet d'estimer l'attitude en utilisant les moindres carrés, ce qui permet également de tenir compte de la corrélation entre les observations (Willi, 2019).

En reformulant l'équation d'observation de double-différence, il est en effet possible de faire apparaître le bras de levier entre l'antenne principale A et l'antenne secondaire B dans le système TRS.

$$\lambda \cdot \nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij}} = \mathbf{e}^{jT} \cdot (\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}}_B) - \mathbf{e}^{jT} \cdot (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A) - \mathbf{e}^{iT} \cdot (\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_B) + \mathbf{e}^{iT} \cdot (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A) - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (10.13)$$

$$= \mathbf{e}^{jT} \cdot (\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^j + \mathbf{x}_A) - \mathbf{e}^{iT} \cdot (\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^i + \mathbf{x}_A) - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (10.14)$$

$$= (\mathbf{x}_A - \hat{\mathbf{x}}_B) \cdot (\mathbf{e}^{jT} - \mathbf{e}^{iT}) - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (10.15)$$

Avec :

$$\mathbf{e}^{iT} = \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A|} \quad (10.16)$$

$$\mathbf{e}^{jT} = \frac{\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A|} \quad (10.17)$$

Puisque les lignes de base sont courtes, on admet que les lignes de visées en direction du satellite sont parallèles pour les deux récepteurs.

La ligne de base entre les récepteurs A et B dans le système body peut être exprimée en fonction de la position des deux récepteurs dans le système TRS et des matrices de rotation entre le système TRS et le système topo, respectivement entre le système topo et le système body.

$$\mathbf{b}_{AB}^{\text{body}} = \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{body}} \cdot \mathbf{R}_{\text{TRS}}^{\text{topo}} \cdot (\mathbf{x}_A^{\text{TRS}} - \mathbf{x}_B^{\text{TRS}}) \quad (10.18)$$

On peut également tourner l'équation pour déterminer la ligne de base dans le système TRS :

$$\mathbf{b}_{AB}^{\text{TRS}} = (\mathbf{x}_A^{\text{TRS}} - \mathbf{x}_B^{\text{TRS}}) = \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{TRS}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}} \quad (10.19)$$

L'équation d'observation devient alors :

$$\lambda \cdot \nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij}} = (\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}) \cdot (\mathbf{e}^{j^T} - \mathbf{e}^{i^T}) - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (10.20)$$

$$= (\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}) \cdot \left(\frac{\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}}_A}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A|} - \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A|} \right) - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (10.21)$$

Avec :

- $\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij}$ Observation de double-différence sur la phase entre les satellites i et j et les récepteurs A et B
- $\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}}$ Matrice de rotation pour passer du système topo au système WGS84. Cette matrice de rotation ne varie que très peu si on reste au même endroit sur Terre.
- $\mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}$ Bras de levier entre le récepteur principal et le récepteur secondaire, donné dans le système body
- $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ Matrice de rotation pour passer du système body au système topo
- \mathbf{x}^i Position du satellite i (donnée par les éphémérides)
- \mathbf{x}^j Position du satellite j (donnée par les éphémérides)
- \mathbf{x}_A Position du récepteur principal (déterminée via un calcul sur le code)
- \mathbf{e}^{i^T} Vecteur unitaire de la ligne de visée en direction du satellite i
- \mathbf{e}^{j^T} Vecteur unitaire de la ligne de visée en direction du satellite j
- λ Longueur d'onde du signal observé
- $\nabla \Delta N_{AB}^{ij}$ Ambiguïté de double-différence entre les satellites i et j et les récepteurs A et B
- $\nabla \Delta P_{AB}^{ij}$ Observation de double-différence sur le code entre les satellites i et j et les récepteurs A et B

Si l'on utilise des observations de double-différence sur le code, l'équation est similaire. Le terme de l'ambiguïté de double-différence disparaît simplement.

$$\nabla \Delta P_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\nabla \Delta P_{AB}^{ij}} = (\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}) \cdot (\mathbf{e}^{j^T} - \mathbf{e}^{i^T}) = (\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}) \cdot \left(\frac{\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A|} - \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A|} \right) \quad (10.22)$$

Avec :

- $\nabla \Delta P_{AB}^{ij}$ Observation de double-différence sur le code entre les satellites i et j et les récepteurs A et B

11 Estimation de Gauss-Markov avec contraintes

Le calcul d'ajustement des observations GNSS se base sur une estimation de Gauss-Markov avec contraintes entre paramètres (Guillaume, 2022b). Ce modèle se résume par le système d'équations suivant, formé de n équations d'observations et de c équations de contraintes :

$$\begin{cases} \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \end{cases} \quad (11.1)$$

Avec :

- \mathbf{l} Vecteur des observations
- $\hat{\mathbf{v}}$ Vecteur des résidus ajustés
- $\hat{\mathbf{x}}$ Vecteurs des inconnues à estimer
- $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ Fonction des inconnues (équations d'observations)
- $\mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}})$ Fonction des inconnues (équations de contraintes)

Les fonctions sont linéarisées autour des paramètres approchés.

$$\begin{cases} \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}^{\circ}} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} \\ 0 &= \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}^{\circ}} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (11.2)$$

Les matrices jacobiennes, formées par les dérivées partielles des fonctions par rapport aux inconnues sont définies de la façon suivante :

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \hat{x}_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \hat{x}_u} \end{array} \right) \bigg|_{\hat{x}_1^{\circ}, \hat{x}_2^{\circ}, \dots, \hat{x}_3^{\circ}} \quad \mathbf{C} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial c_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial c_1}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial c_1}{\partial \hat{x}_u} \\ \frac{\partial c_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial c_2}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial c_2}{\partial \hat{x}_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial c_c}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial c_c}{\partial \hat{x}_2} & \cdots & \frac{\partial c_c}{\partial \hat{x}_u} \end{array} \right) \bigg|_{\hat{x}_1^{\circ}, \hat{x}_2^{\circ}, \dots, \hat{x}_3^{\circ}} \quad (11.3)$$

Avec les vecteurs suivants :

$$\delta \mathbf{l} = \mathbf{l} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}^{\circ}) \quad \mathbf{t} = -\mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}}^{\circ}) \quad (11.4)$$

On peut réécrire le système d'équations sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \delta \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{A} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{C} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (11.5)$$

Le principe de l'estimation du vecteur des paramètres inconnus est de calculer des itérations successives jusqu'à la convergence, en mettant à jour le vecteur des paramètres approchés par le vecteur des accroissements :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{\circ} = \hat{\mathbf{x}}_k^{\circ} + \delta \hat{\mathbf{x}}_k \quad (11.6)$$

La solution de l'estimation par les moindres carrés est celle qui minimise la fonction suivante :

$$\min \hat{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}} \quad (11.7)$$

Le vecteur des accroissements $\delta \hat{\mathbf{x}}$ se calcule de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{l} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} \quad (11.8)$$

Pour calculer le vecteur des résidus, on applique simplement la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{l} \quad (11.9)$$

On peut également calculer l'écart-type empirique de l'unité de poids :

$$s_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{n - u + c}} \quad (11.10)$$

La surabondance du calcul est simplement la somme du nombre d'observations et de contraintes à laquelle on soustrait le nombre d'inconnues :

$$f = n - u + c \quad (11.11)$$

La matrice des cofacteurs des paramètres estimés est déduite de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} \quad (11.12)$$

Avant d'entrer dans le détail du calcul d'ajustement pour la détermination d'attitude, il est utile de rappeler les calculs d'ajustement servant à détermination de la position d'un récepteur.

11.1 Positionnement simple sur le code (Single Point Positioning SPP)

11.1.1 Une seule époque

Ce paragraphe présente l'estimation par les moindres carrés de la position d'un point via la mesure sur le code.

L'équation d'observation est la suivante :

$$f(x) = P_A^i + \hat{v}_{P_A^i} = |\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_A| + c \cdot \hat{\delta t}_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (11.13)$$

Avec :

- P_A^i Observation de pseudo-distance entre le récepteur A et le satellite i
- $\hat{v}_{P_A^i}$ Résidu à minimiser
- \mathbf{x}^i Position du satellite (donnée par les éphémérides)
- $\hat{\mathbf{x}}_A$ Position du récepteur (à estimer par les moindres carrés)
- $c \cdot \hat{\delta t}_{rec}^{recA}$ Erreur d'horloge du récepteur (à estimer par les moindres carrés)
- $\delta \rho_{A,trop}^i$ Erreur due au retard troposphérique (modélisée par le modèle de Saastamoinen)
- $\delta \rho_{A,iono}^i$ Erreur due au retard ionosphérique (modélisée par le modèle de Klobuchar)

Les étapes d'un ajustement par les moindres carrés sont les suivantes (dans cet exemple, il n'y a pas de contraintes dans le calcul) :

1. Définition du vecteur des paramètres inconnus :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{y}_A \\ \hat{z}_A \\ c\hat{dt}_r \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

Avec une seule époque d'observation, on a 4 inconnues à estimer et il faut donc au moins 4 satellites pour déterminer la position et l'erreur d'horloge du récepteur.

2. Définition du vecteur des paramètres approchés :

$$\overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} +6378137.000 \\ +0.000 \\ +0.000 \\ +0.000 \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

3. Définition du vecteur des observations :

Chaque ligne correspond à un satellite observé par le récepteur.

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} P_A^i \\ P_A^j \\ P_A^k \\ \vdots \\ P_A^z \end{pmatrix} \quad (11.16)$$

4. Calcul de la matrice A :

La matrice A contient les dérivés partielles de l'équation d'observations par rapport à chaque inconnue. On pourrait calculer analytiquement les dérivées partielles, mais puisque l'équation d'observations est

relativement compliquée, le choix a été fait de calculer les valeurs par dérivées numériques. Chaque ligne correspond à une observation sur un satellite et les colonnes représentent les inconnues.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} P_A^i \\ P_A^j \\ P_A^k \\ \vdots \\ P_A^z \end{matrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_A & \hat{y}_A & \hat{z}_A & \hat{c}dt_{rA} \\ \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dx)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dx} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dy)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dy} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dz)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dz} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dct_r)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dct_r} \\ \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dx)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dx} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dy)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dy} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dz)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dz} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dct_r)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dct_r} \\ \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dx)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dx} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dy)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dy} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dz)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dz} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dct_r)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dct_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dx)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dx} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dy)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dy} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dz)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dz} & \frac{f(\hat{\mathbf{x}}+dct_r)-f(\hat{\mathbf{x}})}{dct_r} \end{pmatrix} \quad (11.17)$$

5. Calcul du vecteur des fonctions approchées :

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} P_A^i \\ P_A^j \\ P_A^k \\ \vdots \\ P_A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_A| + c \cdot \overset{\circ}{\delta}t_{recA}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \\ |\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}}_A| + c \cdot \overset{\circ}{\delta}t_{recA}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_j} + \delta \rho_{A,trop}^j + \delta \rho_{A,iono}^j \\ |\mathbf{x}^k - \hat{\mathbf{x}}_A| + c \cdot \overset{\circ}{\delta}t_{recA}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_k} + \delta \rho_{A,trop}^k + \delta \rho_{A,iono}^k \\ \vdots \\ |\mathbf{x}^z - \hat{\mathbf{x}}_A| + c \cdot \overset{\circ}{\delta}t_{recA}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_z} + \delta \rho_{A,trop}^z + \delta \rho_{A,iono}^z \end{pmatrix} \quad (11.18)$$

6. Calcul du vecteur des observations réduites :

$$\delta \mathbf{l} = \mathbf{l} - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (11.19)$$

7. Définition de la matrice de variance-covariance des observations :

Puisque l'on part de l'hypothèse que les observations ne sont pas corrélées entre elles, la matrice \mathbf{K}_{II} est une matrice diagonale. On admet un écart-type de 1 m sur les observations sur le code.

$$\mathbf{K}_{\text{II}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

8. Définition de l'écart-type a priori de l'unité de poids σ_0 :

Il est fixé en fonction de l'écart-type des observations, de manière à ce que la matrice de poids contienne des valeurs proches de 1.

$$\sigma_0 = 1 \quad (11.21)$$

9. Calcul de la matrice des cofacteurs des observations :

$$\mathbf{Q}_{\text{II}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \mathbf{K}_{\text{II}} \quad (11.22)$$

10. Calcul de la matrice des poids :

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\text{II}}^{-1} \quad (11.23)$$

11. Calcul de l'accroissement $\delta \hat{\mathbf{x}}$:

$$\delta \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{l} \quad (11.24)$$

12. Calcul du nouveau vecteur des paramètres inconnus :

Les valeurs estimées deviennent les valeurs approchées pour la prochaine itération, jusqu'à ce que $\delta \hat{\mathbf{x}} < 0.001$.

$$\hat{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\hat{\mathbf{x}}} + \delta \hat{\mathbf{x}} \quad (11.25)$$

13. Calcul du vecteur des résidus :

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{l} \quad (11.26)$$

14. Calcul de l'écart-type a posteriori s_0 :

$$s_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{n - u}} \quad (11.27)$$

15. Calcul de la matrice des cofacteurs des paramètres estimés :

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \quad (11.28)$$

16. Calcul de la matrice de variance-covariance des paramètres estimés :

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{x}}^2 & \sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{y}} & \sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{z}} & \sigma_{\hat{x}}\sigma_{\hat{c}dt_r} \\ \sigma_{\hat{y}}\sigma_{\hat{x}} & \sigma_{\hat{y}}^2 & \sigma_{\hat{y}}\sigma_{\hat{z}} & \sigma_{\hat{y}}\sigma_{\hat{c}dt_r} \\ \sigma_{\hat{z}}\sigma_{\hat{x}} & \sigma_{\hat{z}}\sigma_{\hat{y}} & \sigma_{\hat{z}}^2 & \sigma_{\hat{z}}\sigma_{\hat{c}dt_r} \\ \sigma_{\hat{c}dt_r}\sigma_{\hat{x}} & \sigma_{\hat{c}dt_r}\sigma_{\hat{y}} & \sigma_{\hat{c}dt_r}\sigma_{\hat{z}} & \sigma_{\hat{c}dt_r}^2 \end{pmatrix} \quad (11.29)$$

Cette matrice contient les variances des paramètres estimés sur sa diagonale. La précision des paramètres estimés se trouve en prenant la racine du terme sur la diagonale.

$$\sigma_{\hat{x}} = \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{x}_1\hat{x}_1}} \quad (11.30)$$

$$\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{x}_2\hat{x}_2}} \quad (11.31)$$

$$\sigma_{\hat{z}} = \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{x}_3\hat{x}_3}} \quad (11.32)$$

$$\sigma_{\hat{c}dt_r} = \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{x}_4\hat{x}_4}} \quad (11.33)$$

11.1.2 Point statique, plusieurs époques

Si on a plusieurs époques d'observations mais que le point reste statique, le vecteur des paramètres inconnus ne change pas, mais on a simplement plus d'observations pour déterminer les inconnues.

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{y}_A \\ \hat{z}_A \\ \hat{c}dt_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} P_{A1}^i \\ P_{A1}^j \\ P_{A1}^k \\ \vdots \\ P_{A2}^i \\ P_{A2}^j \\ P_{A2}^k \\ \vdots \\ P_{An}^z \end{pmatrix} \quad (11.34)$$

La matrice \mathbf{A} devient alors la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \hat{x}_A & \hat{y}_A & \hat{z}_A & \hat{c}dt_{rA} \\ \begin{matrix} P_{A1}^i \\ P_{A1}^j \\ P_{A1}^k \\ \vdots \\ P_{A2}^i \\ P_{A2}^j \\ P_{A2}^k \\ \vdots \\ P_{An}^z \end{matrix} & \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (11.35)$$

11.1.3 Point cinématique, plusieurs époques

Si on a plusieurs époques d'observations et que le point se déplace (calcul cinématique), il faut estimer la position du point à chaque époque, mais l'erreur d'horloge du récepteur reste la même pour toutes les époques. Chaque époque apporte alors 3 inconnues de position supplémentaires. Le vecteur des observations reste le

même que dans le cas statique. Le vecteur des paramètres inconnus devient alors :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{A_1} \\ \hat{y}_{A_1} \\ \hat{z}_{A_1} \\ \hat{x}_{A_2} \\ \hat{y}_{A_2} \\ \hat{z}_{A_2} \\ \vdots \\ \hat{z}_{A_n} \\ \hat{c}dt_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} P_{A_1}^i \\ P_{A_1}^j \\ P_{A_1}^k \\ \vdots \\ P_{A_2}^i \\ P_{A_2}^j \\ P_{A_2}^k \\ \vdots \\ P_{A_n}^z \end{pmatrix} \quad (11.36)$$

La matrice \mathbf{A} est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \hat{x}_{A_1} & \hat{y}_{A_1} & \hat{z}_{A_1} & \hat{x}_{A_2} & \hat{y}_{A_2} & \hat{z}_{A_2} & \dots & \hat{z}_{A_n} & \hat{c}dt_r \\ \begin{matrix} P_{A_1}^i \\ P_{A_1}^j \\ P_{A_1}^k \\ \vdots \\ P_{A_2}^i \\ P_{A_2}^j \\ P_{A_2}^k \\ \vdots \\ P_{A_n}^z \end{matrix} & \begin{pmatrix} \text{x} & \text{x} & \text{x} & - & - & - & \dots & - & \text{x} \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & - & - & - & \dots & - & \text{x} \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & - & - & - & \dots & - & \text{x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \dots & - & \text{x} \\ - & - & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \dots & - & \text{x} \\ - & - & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \dots & - & \text{x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - & - & - & \dots & \text{x} & \text{x} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (11.37)$$

11.2 Positionnement différentiel sur le code

$$f(x) = \nabla \Delta P_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\nabla \Delta P_{AB}^{ij}} = |\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - |\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_B| + |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| \quad (11.38)$$

11.2.1 Une seule époque

Lors d'un calcul différentiel, les coordonnées du point de base sont supposées connues et fixes. Ainsi, le vecteur des paramètres inconnus n'est composé que des coordonnées du récepteur B. Les erreurs d'horloges des récepteurs s'annulent d'ailleurs dans un calcul de double-différence.

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{y}_B \\ \hat{z}_B \end{pmatrix} \quad (11.39)$$

Définition du vecteur des observations :

Chaque ligne correspond à une observation de double-différence entre 2 satellites et 2 récepteurs. En général, on choisit un satellite de référence visible durant toute la durée d'observation.

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \nabla \Delta P_{AB}^{ij} \\ \nabla \Delta P_{AB}^{ik} \\ \nabla \Delta P_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta P_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \quad (11.40)$$

La matrice \mathbf{A} est la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \hat{x}_B & \hat{y}_B & \hat{z}_B \\ \begin{matrix} \nabla \Delta P_{AB}^{ij} \\ \nabla \Delta P_{AB}^{ik} \\ \nabla \Delta P_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta P_{AB}^{iz} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (11.41)$$

11.2.2 Point statique, plusieurs époques

Lorsque le récepteur est statique, le vecteur des inconnues ne change pas, mais il y a plus d'observations dans le vecteur d'observations.

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{y}_B \\ \hat{z}_B \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta P_{AB1}^{ij} \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{ik} \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ij} \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ik} \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta P_{ABn}^{ij} \end{pmatrix} \quad (11.42)$$

La matrice de variance-covariance devient la suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \hat{x}_B & \hat{y}_B & \hat{z}_B \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{ij} & \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x \end{pmatrix} \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{ik} & \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{il} & \\ \vdots & \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ij} & \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ik} & \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{il} & \\ \vdots & \\ \nabla\Delta P_{ABn}^{iz} & \end{matrix} \quad (11.43)$$

11.2.3 Point cinématique, plusieurs époques

Si le récepteur se déplace, il est nécessaire de calculer sa position à chaque époque.

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \\ z_{B1} \\ x_{B2} \\ y_{B2} \\ z_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bn} \\ y_{Bn} \\ z_{Bn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta P_{AB1}^{ij} \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{ik} \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ij} \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ik} \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta P_{ABn}^{iz} \end{pmatrix} \quad (11.44)$$

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \hat{x}_{B1} & \hat{y}_{B1} & \hat{z}_{B1} & \hat{x}_{B2} & \hat{y}_{B2} & \hat{z}_{B2} & \dots & \hat{x}_{Bn} & \hat{y}_{Bn} & \hat{z}_{Bn} \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{ij} & \begin{pmatrix} x & x & x & - & - & - & - & - & - & - \\ x & x & x & - & - & - & - & - & - & - \\ x & x & x & - & - & - & - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & x & x & x & - & - & - & - \\ - & - & - & x & x & x & - & - & - & - \\ - & - & - & x & x & x & - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & - & - & - & - & x & x & x \end{pmatrix} \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{ik} & \\ \nabla\Delta P_{AB1}^{il} & \\ \vdots & \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ij} & \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{ik} & \\ \nabla\Delta P_{AB2}^{il} & \\ \vdots & \\ \nabla\Delta P_{ABn}^{iz} & \end{matrix} \quad (11.45)$$

11.3 Positionnement différentiel sur la phase

$$f(x) = \nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij}} = |\mathbf{x}^j - \hat{\mathbf{x}}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - |\mathbf{x}^i - \hat{\mathbf{x}}_B| + |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (11.46)$$

11.3.1 Une seule époque

Un calcul différentiel sur la phase avec une seule époque n'est pas possible si les ambiguïtés ne sont pas fixées, car chaque observation apporte une inconnue supplémentaire (ambiguïté), en plus des inconnues de position. Il y a donc trois inconnues de trop par rapport aux observations. Il est ainsi nécessaire de faire un calcul avec au moins deux époques d'observation.

11.3.2 Point statique, plusieurs époques

Lors d'un ajustement avec les ambiguïtés flottantes, ces dernières interviennent comme inconnues dans le calcul. Le résultat par les moindres carrés permet de trouver des valeurs décimales pour les ambiguïtés de double-différence.

Calcul avec ambiguïtés flottantes :

Le vecteur des paramètres à estimer est composé des inconnues de position ainsi que des ambiguïtés de double-différences. Le vecteur des observations est formé par les observations de double-différences entre deux satellites et deux récepteurs (en choisissant un satellite de référence et un récepteur de référence).

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_B \\ \hat{y}_B \\ \hat{z}_B \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ik} \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \nabla \Delta \Phi_{AB1}^{ij} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB1}^{ik} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB1}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \Phi_{AB2}^{ij} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB2}^{ik} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB2}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \Phi_{ABn}^{iz} \end{pmatrix} \quad (11.47)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \nabla \Delta \Phi_{AB1}^{ij} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB1}^{ik} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB1}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \Phi_{AB2}^{ij} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB2}^{ik} \\ \nabla \Delta \Phi_{AB2}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \Phi_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_B & \hat{y}_B & \hat{z}_B & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ij} & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ik} & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{il} & \dots & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{iz} \\ x & x & x & x & - & - & \dots & - \\ x & x & x & - & x & - & \dots & - \\ x & x & x & - & - & x & \dots & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & - & - & - & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & - & - & \dots & - \\ x & x & x & - & x & - & \dots & - \\ x & x & x & - & - & x & \dots & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & - & - & - & \ddots & \vdots \\ x & x & x & - & - & - & \dots & x \end{pmatrix} \quad (11.48)$$

Après avoir effectué un ajustement avec les ambiguïtés flottantes, il est nécessaire d'effectuer un second ajustement en fixant les ambiguïtés sur les valeurs entières trouvées par un algorithme de résolution des ambiguïtés (voir chapitre 13). L'ajustement par les moindres carrés reste globalement similaire à l'ajustement avec les ambiguïtés flottantes. Mais comme les ambiguïtés sont fixées, elles interviennent comme contraintes dans le calcul. Cela implique que la surabondance est plus élevée.

Ainsi, le système à résoudre est composé non plus seulement d'équations d'observations, mais aussi d'équations de contraintes entre les paramètres. Pour chaque ambiguïté de double-différence, on a alors une contrainte.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ik} \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{B1} & \hat{y}_{B1} & \hat{z}_{B1} & \dots & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ij} & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ik} & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{il} & \dots & \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{iz} \\ - & - & - & \dots & 1 & - & - & - & - \\ - & - & - & \dots & - & 1 & - & - & - \\ - & - & - & \dots & - & - & 1 & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & - & - & - & \ddots & - \\ - & - & - & \dots & - & - & - & - & 1 \end{pmatrix} \quad (11.49)$$

Le vecteur \mathbf{t} est un vecteur nul :

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.50)$$

11.3.3 Point cinématique, plusieurs époques

Dans le cas d'un calcul cinématique, les vecteurs et les matrices sont les suivants :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{B1} \\ \hat{y}_{B1} \\ \hat{z}_{B1} \\ \hat{x}_{B2} \\ \hat{y}_{B2} \\ \hat{z}_{B2} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{ik} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{ik} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\Phi_{ABn}^{iz} \end{pmatrix} \quad (11.51)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{ik} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{ik} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\Phi_{ABn}^{iz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{B1} & \hat{y}_{B1} & \hat{z}_{B1} & \hat{x}_{B2} & \hat{y}_{B2} & \hat{z}_{B2} & \dots & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{il} & \dots & \nabla\Delta\hat{N}_{ABn}^{iz} \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & - & - & - & \dots & \text{x} & - & - & - & - \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & - & - & - & \dots & - & \text{x} & - & - & - \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & - & - & - & \dots & - & - & \text{x} & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & - & - & - & - & - \\ - & - & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \dots & \text{x} & - & - & - & - \\ - & - & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \dots & - & \text{x} & - & - & - \\ - & - & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \dots & - & - & \text{x} & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & \dots & - & - & - & - & \text{x} \end{pmatrix} \quad (11.52)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{B1} & \hat{y}_{B1} & \hat{z}_{B1} & \hat{x}_{B2} & \hat{y}_{B2} & \hat{z}_{B2} & \dots & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{il} & \dots & \nabla\Delta\hat{N}_{ABn}^{iz} \\ - & - & - & - & - & - & \dots & 1 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & \dots & - & 1 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & \dots & - & - & 1 & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & \dots & - & - & - & - & 1 \end{pmatrix} \quad (11.53)$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{il} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{iz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.54)$$

11.4 Attitude différentielle sur la phase

L'équation d'observations pour une observation entre les récepteurs A et B et les satellites i et j est la suivante :

$$f(x) = \lambda \cdot (\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij}}) = (\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}) \cdot \left(\frac{\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A|} - \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A|} \right) - \lambda \cdot \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ij} \quad (11.55)$$

Avec :

- $\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij}$ Observation de double-différence sur la phase
- $\hat{v}_{\nabla \Delta \Phi_{AB}^{ij}}$ Résidu à minimiser
- $\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}}$ Matrice de rotation pour passer du système topo au système WGS84. Cette matrice de rotation ne varie que très peu si on reste au même endroit sur Terre. Elle est calculée à partir de la solution sur le code du point A.
- $\hat{\mathbf{R}}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ Matrice de rotation pour passer du système body au système topo (paramétrisées selon des angles ou des quaternions à estimer)
- \mathbf{x}^i Position du satellite i (donnée par les éphémérides)
- \mathbf{x}^j Position du satellite j (donnée par les éphémérides)
- \mathbf{x}_A Position du récepteur principal (déterminée via un calcul sur le code)
- $\mathbf{b}_{AB}^{\text{body}}$ Bras de levier entre le récepteur principal et le récepteur secondaire, donné dans le système body (connu)
- λ Longueur d'onde du signal observé
- $\nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ij}$ Ambiguïté de double-différence entre les satellites i et j et les récepteurs A et B (à estimer)

Si l'on souhaite déterminer les angles d'attitude par les moindres carrés, on remarque que les seules inconnues dans l'équation d'observation sont la matrice de rotation $\hat{\mathbf{R}}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et les ambiguïtés de double-différences. Comme mentionné dans le chapitre 9.5, une matrice de rotation peut être paramétrisée de différentes manières. Ainsi, la matrice de rotation peut être définie à partir des 3 angles d'attitude ou à partir des 4 composantes d'un quaternion unitaire.

$$\hat{\mathbf{R}}_{\text{body}}^{\text{topo}} = \hat{\mathbf{R}}_{\text{body}}^{\text{topo}}(\hat{y}_{\text{body}}^{\text{topo}}, \hat{p}_{\text{body}}^{\text{topo}}, \hat{r}_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \hat{\mathbf{R}}_{\text{body}}^{\text{topo}}(\hat{q}_0^{\text{topo}}, \hat{q}_1^{\text{topo}}, \hat{q}_2^{\text{topo}}, \hat{q}_3^{\text{topo}}) \quad (11.56)$$

Dans ce projet, le choix a été fait d'utiliser uniquement des quaternions, en fixant une contrainte pour qu'ils soient unitaires. Ainsi, pour chaque quaternion, on a une équation de contrainte :

$$\mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 - 1 = 0 \quad (11.57)$$

Pour chaque époque, on a 4 composantes de quaternion à estimer.

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{01} \\ \hat{q}_{11} \\ \hat{q}_{21} \\ \hat{q}_{31} \\ \hat{q}_{02} \\ \hat{q}_{12} \\ \hat{q}_{22} \\ \hat{q}_{32} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AB}^{ik} \\ \vdots \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AC}^{ij} \\ \nabla \Delta \hat{N}_{AC}^{ik} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11.58)$$

Les ambiguïtés de double-différences sont supposées rester constantes pour une paire de satellites et une paire de récepteurs données. Toutefois, en cas de saut de cycle, il est nécessaire d'estimer une ambiguïté supplémentaire de manière à en calculer une avant le saut de cycle et une après le saut de cycle.

Dans le vecteur des inconnues, on a une ambiguïté de double-différence supplémentaire à estimer :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{01} \\ \hat{q}_{11} \\ \hat{q}_{21} \\ \hat{q}_{31} \\ \hat{q}_{02} \\ \hat{q}_{12} \\ \hat{q}_{22} \\ \hat{q}_{32} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AC}^{ij} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AC}^{ik} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB2}^{ij} \end{pmatrix} \quad (11.63)$$

L'observation $\nabla\Delta\Phi_{AB2}^{ij}$ qui correspond à une observation après le saut de cycle est liée à la nouvelle ambiguïté.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB1}^{ik} \\ \nabla\Delta\Phi_{AC1}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AC1}^{ik} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AB2}^{ik} \\ \nabla\Delta\Phi_{AC2}^{ij} \\ \nabla\Delta\Phi_{AC2}^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{01} & \hat{q}_{11} & \hat{q}_{21} & \hat{q}_{31} & \hat{q}_{02} & \hat{q}_{12} & \hat{q}_{22} & \hat{q}_{32} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} & \nabla\Delta\hat{N}_{AC}^{ij} & \nabla\Delta\hat{N}_{AC}^{ik} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB2}^{ij} \\ \times & \times & \times & \times & - & - & - & - & \times & - & - & - & - \\ \times & \times & \times & \times & - & - & - & - & - & \times & - & - & - \\ \times & \times & \times & \times & - & - & - & - & - & - & \times & - & - \\ \times & \times & \times & \times & - & - & - & - & - & - & - & \times & - \\ - & - & - & - & \times & \times & \times & \times & - & - & - & - & \times \\ - & - & - & - & \times & \times & \times & \times & - & \times & - & - & - \\ - & - & - & - & \times & \times & \times & \times & - & - & \times & - & - \\ - & - & - & - & \times & \times & \times & \times & - & - & - & \times & - \end{pmatrix} \quad (11.64)$$

De même, dans le calcul avec les ambiguïtés fixées, on a une condition supplémentaire pour la nouvelle ambiguïté.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} \\ \nabla\Delta\hat{N}_{AB2}^{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{01} & \hat{q}_{11} & \hat{q}_{21} & \hat{q}_{31} & \hat{q}_{02} & \hat{q}_{12} & \hat{q}_{22} & \hat{q}_{32} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ij} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB}^{ik} & \nabla\Delta\hat{N}_{AB2}^{ij} \\ 2q_{01} & 2q_{11} & 2q_{21} & 2q_{31} & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 2q_{01} & 2q_{11} & 2q_{21} & 2q_{31} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 1 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & 1 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 1 \end{pmatrix} \quad (11.65)$$

11.4.1 Calcul surabondance

Afin de déterminer la surabondance du calcul, il est nécessaire de compter le nombre d'observations, le nombre d'inconnues et le nombre de contraintes. Dans l'exemple ci-dessous, on utilise 10 satellites et 4 récepteurs pour une durée d'observation de 10 époques. On a un saut de cycle qui intervient sur une paire de satellites et de récepteurs. On admet que tous les satellites sont visibles par tous les récepteurs durant toute la durée d'observation.

- Nombre de satellites utilisés (S) : 10
- Nombre de récepteurs (R) : 4
- Nombre d'époques de mesures (E) : 10
- Nombre de sauts de cycles entre 2 satellites et 2 récepteurs (u_{slip}) : 1

On peut alors calculer la surabondance de cette manière :

- Nombre d'observations de double-différences :

$$n = (S - 1) \cdot (R - 1) \cdot E \quad (11.66)$$

- Nombre d'inconnues d'attitude (éléments de quaternion)

$$u_Q = 4 \cdot E \quad (11.67)$$

- Nombre d'inconnues d'ambiguïtés de double-différence (sans saut de cycle)

$$u_A = (S - 1) \cdot (R - 1) \quad (11.68)$$

- Nombre de contraintes (quaternions) :

$$c_Q = 1 \cdot E \quad (11.69)$$

- Nombre de contraintes d'ambiguïtés (si les ambiguïtés sont fixées) :

$$c_A = (S - 1) \cdot (R - 1) \quad (11.70)$$

$$n = (S - 1) \cdot (R - 1) \cdot E = (10 - 1) \cdot (4 - 1) \cdot 10 = 270 \quad (11.71)$$

$$u = u_Q + u_A + slips = 4 \cdot E + (S - 1) \cdot (R - 1) + u_{slip} = 4 \cdot 10 + (10 - 1) \cdot (4 - 1) + 1 = 68 \quad (11.72)$$

$$c = c_Q + c_A = 1 \cdot E + (S - 1) \cdot (R - 1) = 1 \cdot 10 + (10 - 1) \cdot (4 - 1) = 37 \quad (11.73)$$

$$\text{Surabondance} = n - u + c = 270 - 68 + 37 = 239 \quad (11.74)$$

Avec :

- n Nombre d'observations
- u Nombre d'inconnues
- c Nombre de contraintes
- E Nombre d'époques d'observation
- S Nombre de satellites observés (on admet que les mêmes satellites sont visibles durant toute la durée d'observation)
- R Nombre de récepteurs
- $slips$ Nombre de sauts de cycle

12 Précision

En GNSS, pour estimer la précision d'un calcul de positionnement, on peut utiliser les indicateurs de dilution de la précision (DOP) déduits de la matrice des cofacteurs des paramètres estimés (Bauer, 2017). Ce sont des indicateurs sans unité, et correspondent à l'écart-type pour des observations de pseudo-distance avec un écart-type a priori de 1 m. On peut les calculer à partir de la matrice des cofacteurs des paramètres estimés $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$.

1. GDOP : indicateur global

$$\text{GDOP} = \sqrt{(q_{\hat{x}\hat{x}} + q_{\hat{y}\hat{y}} + q_{\hat{z}\hat{z}} + q_{\hat{t}\hat{t}})} \quad (12.1)$$

2. PDOP : indicateur sur le positionnement 3D

$$\text{PDOP} = \sqrt{(q_{\hat{x}\hat{x}} + q_{\hat{y}\hat{y}} + q_{\hat{z}\hat{z}})} \quad (12.2)$$

3. HDOP : indicateur sur le positionnement planimétrique (composante horizontale)

$$\text{HDOP} = \sqrt{(q_{\hat{x}\hat{x}} + q_{\hat{y}\hat{y}})} \quad (12.3)$$

4. VDOP : indicateur sur le positionnement altimétrique (composante verticale)

$$\text{VDOP} = \sqrt{(q_{\hat{z}\hat{z}})} \quad (12.4)$$

5. TDOP : indicateur sur l'erreur d'horloge du récepteur

$$\text{TDOP} = \sqrt{(q_{\hat{t}\hat{t}})} \quad (12.5)$$

Ces indicateurs ne sont toutefois pas rigoureux et il est préférable d'utiliser les indicateurs issus directement de la matrice de variance-covariance des paramètres estimés par les moindres carrés.

12.1 Précision de l'attitude

Lorsque l'on calcule l'attitude de la plateforme, l'ajustement par les moindres carrés fournit la précision des paramètres estimés. Si la rotation est paramétrisée à l'aide de quaternions, la matrice de variance-covariance permet de calculer la précision des composantes du quaternion. Si l'on souhaite transformer le quaternion en angles, il est nécessaire de calculer la précision des angles par une propagation d'erreur (Guillaume, 2022b).

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{F}^T \quad (12.6)$$

Avec :

$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$ Matrice de variance-covariance des angles

\mathbf{F} Matrice jacobienne de la fonction permettant de transformer les quaternions en angles

$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}}$ Matrice de variance-covariance des quaternions estimés (sous-matrice de $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$)

On utilise une fonction $f(\hat{\mathbf{x}})$ pour trouver les angles y , p et r à partir des quaternions unitaires. Il s'agit en fait d'une suite de fonctions, puisque l'on construit d'abord une matrice de rotation à partir des quaternions avant de déduire les angles à partir de cette dernière. Les dérivées partielles se trouvent par calcul numérique.

$$\hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{y}, \hat{p}, \hat{r}(\hat{\mathbf{x}}) = f(\hat{\mathbf{x}}) \quad (12.7)$$

$$\approx f(\hat{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} \quad (12.8)$$

$$= f(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{F} \cdot \delta \hat{\mathbf{x}} \quad (12.9)$$

Avec :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(y)}{\partial \hat{q}_0} & \frac{\partial f(y)}{\partial \hat{q}_1} & \frac{\partial f(y)}{\partial \hat{q}_2} & \frac{\partial f(y)}{\partial \hat{q}_3} \\ \frac{\partial f(p)}{\partial \hat{q}_0} & \frac{\partial f(p)}{\partial \hat{q}_1} & \frac{\partial f(p)}{\partial \hat{q}_2} & \frac{\partial f(p)}{\partial \hat{q}_3} \\ \frac{\partial f(r)}{\partial \hat{q}_0} & \frac{\partial f(r)}{\partial \hat{q}_1} & \frac{\partial f(r)}{\partial \hat{q}_2} & \frac{\partial f(r)}{\partial \hat{q}_3} \end{pmatrix} \quad (12.10)$$

L'exemple numérique suivant permet de comprendre comment on peut déterminer la précision des angles par propagation d'erreur.

Le vecteur des composantes du quaternion estimé est le suivant :

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \hat{q}_0 \\ \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.962256 \\ -0.022589 \\ +0.084121 \\ +0.257830 \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

Les angles déterminés à partir des quaternions sont les suivants :

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{p} \\ \hat{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +29.999^\circ \\ +9.994^\circ \\ -0.006^\circ \end{pmatrix} \quad (12.12)$$

On trouve la matrice \mathbf{F} par calcul de dérivées numériques :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -0.4440890 & +0.222045 & +0.111022 & +1.9984000 \\ +0.1665330 & -0.499600 & +1.942890 & -0.0555112 \\ -0.0420941 & +1.958750 & +0.528413 & +0.1761960 \end{pmatrix} \quad (12.13)$$

La matrice de variance-covariance des quaternions $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}}$ est un sous-ensemble de la matrice de variance-covariance des paramètres estimés $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$.

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} +5.73739 \cdot 10^{-8} & +5.44652 \cdot 10^{-8} & -4.07334 \cdot 10^{-7} & -7.64593 \cdot 10^{-8} \\ +5.44652 \cdot 10^{-8} & +8.31655 \cdot 10^{-6} & -2.89313 \cdot 10^{-7} & +6.21594 \cdot 10^{-7} \\ -4.07334 \cdot 10^{-7} & -2.89313 \cdot 10^{-7} & +5.69133 \cdot 10^{-6} & -3.62266 \cdot 10^{-7} \\ -7.64593 \cdot 10^{-8} & +6.21594 \cdot 10^{-7} & -3.62266 \cdot 10^{-7} & +4.58269 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

A partir de l'équation (12.6), on trouve la matrice de variance-covariance $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$.

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} +2.86342 \cdot 10^{-6} & -1.44438 \cdot 10^{-6} & +6.14642 \cdot 10^{-6} \\ -1.44438 \cdot 10^{-6} & +2.37375 \cdot 10^{-5} & -3.42352 \cdot 10^{-6} \\ +6.14642 \cdot 10^{-6} & -3.42352 \cdot 10^{-6} & +3.32845 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

La précision des angles se trouve en prenant la racine des variances contenues sur la diagonale de la matrice $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$.

$$\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{a}_1\hat{a}_1}} \cdot \frac{180}{\pi} = \sqrt{+2.86342 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0.097^\circ \quad (12.16)$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{a}_2\hat{a}_2}} \cdot \frac{180}{\pi} = \sqrt{+2.37375 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0.279^\circ \quad (12.17)$$

$$\sigma_{\hat{r}} = \sqrt{\mathbf{K}_{\hat{a}_3\hat{a}_3}} \cdot \frac{180}{\pi} = \sqrt{+3.32845 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{180}{\pi} = 0.331^\circ \quad (12.18)$$

Les angles et leur précision sont les suivants :

$$\hat{y} = +29.999^\circ \pm 0.097^\circ \quad (12.19)$$

$$\hat{p} = +9.994^\circ \pm 0.279^\circ \quad (12.20)$$

$$\hat{r} = -0.006^\circ \pm 0.331^\circ \quad (12.21)$$

12.2 Précision d'une observation de double-différence

En connaissant la précision d'une observation de zéro-différence, il est possible de calculer la précision d'une observation de double-différence via une propagation d'erreur.

L'écart-type d'une observation de zéro-différence de phase est de 2 mm.

$$\sigma_{L_A^i} = 0.002 \quad (12.22)$$

La précision d'une simple-différence se calcule comme suit :

$$\sigma_{\Delta L_{AB}^i} = \sqrt{\sigma_{L_A^i}^2 + \sigma_{L_B^i}^2} \quad (12.23)$$

La précision d'une double-différence se calcule comme suit :

$$\sigma_{\nabla \Delta L_{AB}^{ij}} = \sqrt{\sigma_{\Delta L_{AB}^i}^2 + \sigma_{\Delta L_{AB}^j}^2} \quad (12.24)$$

Exemple numérique :

$$\sigma_{\Delta L_{AB}^i} = \sqrt{0.002^2 + 0.002^2} = 0.002828$$

$$\sigma_{\nabla \Delta L_{AB}^{ij}} = \sqrt{0.002828^2 + 0.002828^2} = 0.004$$

13 Résolution des ambiguïtés

13.1 Détermination des ambiguïtés de double-différence

Une ambiguïté de phase de zéro-différence est un nombre entier de longueurs d'onde. Une ambiguïté de double-différence est par conséquent aussi un nombre entier. Toutefois, le calcul d'ajustement par les moindres carrés donne des valeurs décimales. On parle alors d'ambiguïtés *flottantes*. A partir de ces valeurs décimales, il existe plusieurs stratégies de calcul pour fixer les ambiguïtés de double-différence sur des nombres entiers. L'algorithme le plus courant est l'algorithme LAMBDA, décrit par Teunissen (Teunissen and Montenbruck, 2017) et développé par l'université de Delft dans les années 1990. L'algorithme se déroule en deux étapes principales :

1. Décorrélation des ambiguïtés flottantes :

Cette étape est essentielle pour pouvoir effectuer une recherche efficace des valeurs entières qui permettent de résoudre les ambiguïtés.

2. Recherche de la meilleure solution pour chaque ambiguïté de double-différence.

Dans ce projet, le code source en python de l'algorithme LAMBDA de l'université de Delft a été utilisé (Teunissen, 2022).

13.2 Recherche de la meilleure solution

Plusieurs stratégies de recherche de la meilleure solution sont possibles :

- **Arrondir** à l'entier le plus proche :

Cette solution est la plus simple. Elle consiste simplement à arrondir les ambiguïtés flottantes au nombre entier le plus proche. Le désavantage de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte de l'écart-type de l'ambiguïté flottante. Ainsi, si l'ambiguïté flottante a un écart-type supérieur à 1, plusieurs solutions seraient possibles. Par exemple, si l'ambiguïté flottante vaut 3.01, la solution trouvée par la méthode des arrondis donne 3 comme valeur entière de l'ambiguïté fixée. Cependant, si l'écart-type vaut 2, les solutions possibles seraient 0, 1, 2, 3 ou 4.

- **Search-and-shrink** et ajustement par les moindres carrés (ILS : Integer Least Squares) :

Cette méthode est basée sur un ajustement par les moindres carrés et permet de trouver l'ambiguïté en cherchant parmi les valeurs possibles en utilisant les corrélations entre les solutions potentielles afin de réduire l'espace de recherche.

- **Bootstrapping** :

Le principe de cette méthode est de partir de l'ambiguïté la plus précise et de l'arrondir au nombre entier le plus proche. Puis les ambiguïtés flottantes restantes sont corrigées en fonction de leur corrélation avec la première ambiguïté fixée. La deuxième ambiguïté la plus précise est alors fixée à un nombre entier et les ambiguïtés restantes sont à nouveau corrigées selon leur corrélation avec la deuxième ambiguïté fixée. Ce processus est répété jusqu'à ne plus avoir d'ambiguïtés flottantes.

- **Résolution d'ambiguïtés partielle** :

Avec cette méthode, il est possible de ne pas fixer toutes les ambiguïtés. On obtient alors un ensemble d'ambiguïtés fixées via la méthode de bootstrapping tandis que les ambiguïtés qui n'ont pas pu être fixées restent flottantes.

Dans ce projet, le choix a été fait d'utiliser la méthode search-and-shrink basée sur un ajustement par les moindres carrés. L'algorithme LAMBDA prend en entrée le vecteur des ambiguïtés flottantes ainsi que la matrice de variance-covariance associée. En sortie, on trouve le vecteur des ambiguïtés fixées ainsi que le ratio par rapport à la deuxième meilleure solution.

14 Sauts de cycle

Un saut de cycle apparaît lorsque le récepteur perd le signal du satellite. Cela peut se produire lors d'une coupure de visibilité entre l'antenne et le satellite ou lorsque l'antenne subit une accélération trop élevée. D'autres facteurs peuvent être responsables des sauts de cycle, notamment les multi-trajets, le rapport signal/bruit trop faible, la scintillation atmosphérique liée à une activité ionosphérique trop élevée ou encore l'interférence avec d'autres signaux utilisant les mêmes fréquences (Guillaume, 2022a). Lorsque le signal est retrouvé, une nouvelle ambiguïté doit alors être déterminée. Pour détecter un saut de cycle, on peut s'aider de la mesure Doppler ou effectuer un calcul de triple-différence. Dans ce projet, la deuxième méthode a été appliquée.

Pour détecter un saut de cycle, on analyse les triples-différences décorrélées qui devraient être des valeurs proches de 0. Toutefois, si la valeur dépasse 1.5, il est probable qu'il s'agisse d'un saut de cycle. Il faut alors

analyser la pente à proximité de la valeur détectée. S'il y a un changement de pente brusque avant et après la valeur détectée, on peut affirmer qu'il s'agit d'un saut de cycle. Les conditions de détection d'un saut de cycle ont été définies de la manière suivante dans ce projet :

$$TD_i > 1.5 \quad (14.1)$$

$$|TD_i - TD_{i-1}| > 10 \cdot |TD_{i-1} - TD_{i-2}| \quad (14.2)$$

$$|TD_i - TD_{i+1}| > 10 \cdot |TD_{i+2} - TD_{i+1}| \quad (14.3)$$

Avec :

TD_i Triple différence de phase à l'époque i

Les figures 8 et 9 permettent de visualiser les triples-différences entre deux satellites et deux récepteurs. Les sauts de cycles apparaissent comme des pics dans le graphique 8, alors que s'il n'y a pas de saut de cycle, les valeurs des triple-différences sont proches de 0 (figure 9).

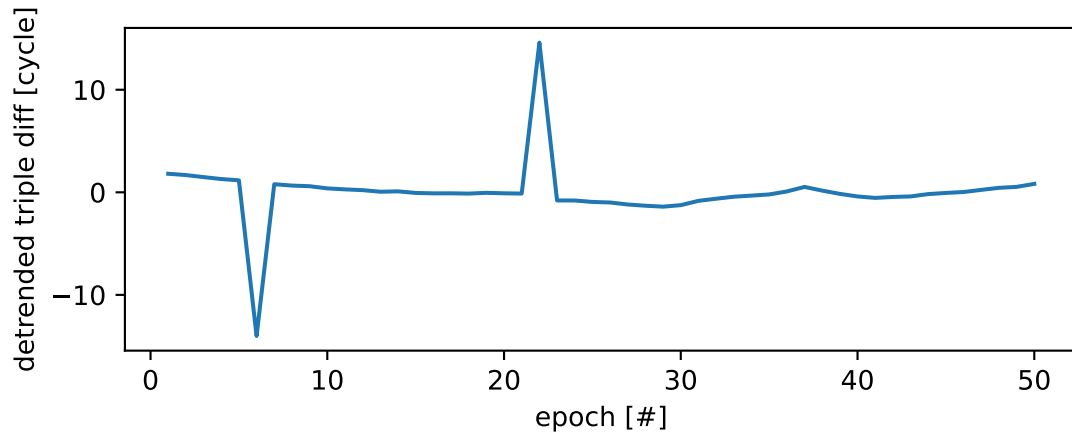


FIGURE 8 – Triple-différences décorrélées avec saut de cycle

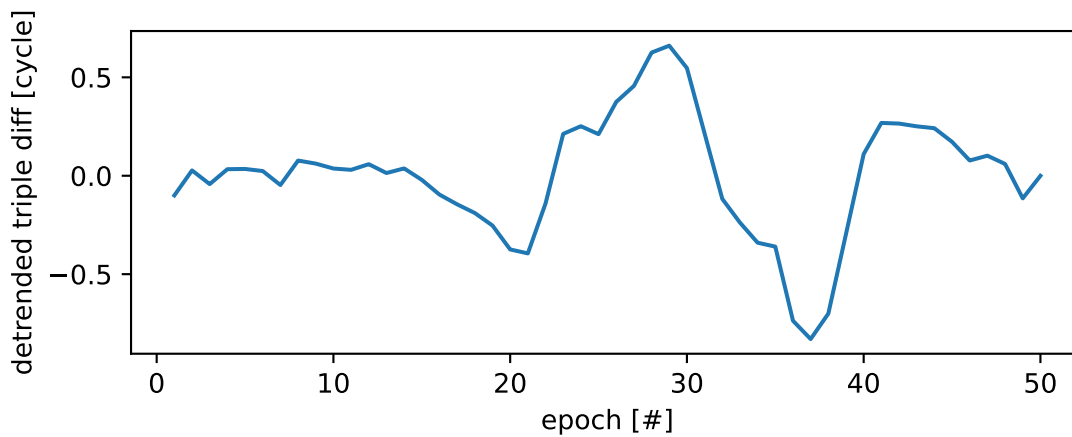


FIGURE 9 – Triple-différences décorrélées sans saut de cycle

Troisième partie

Implémentation du programme

15 Structure du programme

Le programme développé dans le cadre de ce travail se décompose en plusieurs parties :

- Le simulateur de trajectoire
- Le simulateur d'observations GNSS
- Le calcul de détermination de l'attitude de la plateforme

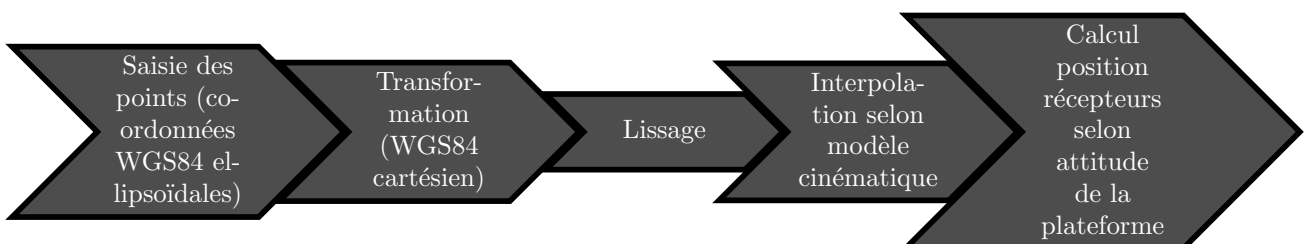
Chacune de ces parties est développée dans la suite de ce rapport.

L'ensemble du programme a été développé en Python et structuré en plusieurs bibliothèques :

- `InteractiveMap` : ce script permet de lancer un géoportail utile pour saisir les points de la trajectoire souhaitée.
- `TrajectorySimulator` : il s'agit du code principal pour simuler des observations RINEX pour une trajectoire donnée.
- `SimulatorUtils` : cette bibliothèque contient toutes les fonctions nécessaires au calcul de la trajectoire GNSS (fonctions d'interpolation) et à la simulation des observations (génération des données RINEX).
- `ModeleAccVitDist` : cette bibliothèque contient les formules pour générer un modèle cinématique utilisé pour la simulation de la trajectoire de la plateforme.
- `GNSSUtils` : cette bibliothèque développée par (Guillaume, 2022a) contient toutes les fonctions nécessaires aux transformations entre les systèmes de référence, ainsi que les modèles troposphériques et ionosphériques.
- `GNSSOrbits` : dans cette bibliothèque développée par (Guillaume, 2022a) on trouve toutes les fonctions permettant le calcul des orbites des satellites.
- `GNSSReceiver` : cette bibliothèque développée par (Guillaume, 2022a) sert à créer un objet récepteur dans le programme, capable notamment d'importer des observations RINEX.
- `RotationUtils` : dans cette bibliothèque sont définies toutes les matrices de rotation ainsi que les fonctions pour trouver des angles à partir d'une matrice de rotation ou encore pour créer une matrice de rotation à partir d'un quaternion unitaire.
- `YamlUtils` : fonctions pour la lecture des fichiers de paramètres au format YAML.
- `GNSSEstimation` : cette bibliothèque développée par (Guillaume, 2022a) contient toutes les fonctions pour le calcul de positionnement GNSS.
- `AttitudeEstimation` : cette bibliothèque a été développée dans le cadre de ce projet et contient les fonctions d'estimation de l'attitude.
- `helmertTransformation` : cette bibliothèque permet d'effectuer des calculs de Helmert 3D entre deux systèmes de coordonnées.
- `LAMBDA` : cette bibliothèque contient les formules pour calculer les ambiguïtés fixées, développée par (Teunissen, 2022).

16 Simulation de la trajectoire

Le but du simulateur de trajectoire de la plateforme est de générer un jeu de positions du récepteur principal de la plateforme, confondu avec le topocentre. A partir de ses coordonnées cartésiennes géocentriques, on peut calculer la position des récepteurs secondaires à l'aide d'une matrice de rotation définie par l'utilisateur, en fonction de l'attitude souhaitée de la plateforme.



Les principales étapes schématisées dans le diagramme ci-dessus sont expliquées dans les paragraphes suivants.

16.1 Interface de saisie de la trajectoire

Grâce à un portail interactif basé sur leaflet (folium) et généré à l'aide d'un script python, l'utilisateur peut dessiner la trajectoire de la plateforme en cliquant des points sur la carte, en sélectionnant un fond OpenStreetMap ou swisstopo (carte nationale ou orthophoto). Une fois le dessin terminé, un fichier `geojson` peut être exporté à l'aide du bouton d'export, contenant les coordonnées ellipsoïdales WGS84 (longitude/latitude) des points cliqués. La figure 10 montre une capture d'écran de l'interface de saisie. Si un fichier `geojson` a déjà été généré par un autre moyen, il peut être directement utilisé à l'étape suivante.



FIGURE 10 – Interface de saisie des points développée en python

16.2 Transformation des coordonnées ellipsoïdales en coordonnées cartésiennes

Puisque le fichier `geojson` contient uniquement des coordonnées WGS84 ellipsoïdales, il est nécessaire de les transformer en coordonnées WGS84 cartésiennes pour les utiliser par la suite, en se basant sur les formules développées au chapitre 9.6. Comme les points dans le fichier `geojson` n'ont pas de composante altimétrique, une hauteur ellipsoïdale constante doit être définie par l'utilisateur. Un autre moyen de fournir une composante altimétrique aurait été de créer un profil altimétrique de la trajectoire, en se basant sur un modèle numérique de terrain. Toutefois, cela n'a pas été effectué dans ce travail.

16.3 Lissage de la trajectoire

La trajectoire lissée est formée de 1000 points séparés d'une toute petite distance l'un de l'autre (selon la longueur totale de la trajectoire) calculés par interpolation à l'aide d'une spline basée sur les points saisis. Cette étape apporte surtout un côté esthétique à la trajectoire, pour éviter d'avoir des cassures dans le parcours simulé

de la plateforme. Ainsi, si l'on souhaite créer une trajectoire avec un angle marqué (p. ex. carrefour), il suffit de cliquer plusieurs points assez proches pour que la spline représente au mieux la trajectoire voulue.

16.4 Modèle cinématique

Puisque le but du simulateur de trajectoire est de générer des données GNSS à une fréquence de 1 Hz, il est nécessaire d'interpoler des points correspondant à cette fréquence, le long de la trajectoire, en tenant compte de la dynamique de la plateforme (accélération, vitesse).

Un script python permet de modéliser la dynamique de la plateforme de façon relativement simple. L'utilisateur peut préparer un modèle d'accélération dans lequel il peut définir la valeur de l'accélération entre une époque de départ et une époque de fin. Une fonction permet ensuite de calculer la vitesse en fonction du temps, par simple intégration de l'accélération.

$$v(t) = \int a(t) dt \quad (16.1)$$

De même, la distance curviligne en fonction du temps est obtenue par intégration de la vitesse.

$$s(t) = \int v(t) dt \quad (16.2)$$

L'utilisateur peut alors saisir le nombre d'époques à simuler et générer des abscisses curvilignes pour chaque époque.

Pour obtenir des coordonnées WGS84 le long de la trajectoire de la plateforme, les abscisses curvilignes calculées précédemment sont interpolées le long de la courbe lissée de la trajectoire. On obtient ainsi des coordonnées cartésiennes à une fréquence de 1 Hz le long de la trajectoire.

L'algorithme d'interpolation des abscisses curvilignes est le suivant :

1. Pour chaque valeur d'abscisse curviligne, on parcourt la liste des distances cumulées de la trajectoire lissée et on calcule la différence entre l'abscisse curviligne et la distance cumulée sur la trajectoire.

$$\Delta_1 = s_t - x_i \quad (16.3)$$

Avec :

s_t Abscisse curviligne correspondant à l'époque t

x_i Distance cumulée de la trajectoire lissée au point i

Calcul de la différence entre la distance cumulée et la distance cumulée suivante :

$$\Delta_2 = x_{i+1} - x_i \quad (16.4)$$

Calcul de la différence entre la distance cumulée suivante et la distance curviligne :

$$\Delta_3 = x_{i+1} - s_t \quad (16.5)$$

Tant que $\Delta_1 > \Delta_2$, on continue la boucle en parcourant toutes les distances cumulées de la trajectoire.

2. Si $\Delta_1 \leq \Delta_2$, on calcule les poids :

$$\text{si } \Delta_1 = 0 : \begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 0 \end{cases} \quad (16.6)$$

$$\text{sinon} : \begin{cases} P_1 = \frac{1}{\Delta_1} \end{cases} \quad (16.7)$$

$$\text{si } \Delta_3 = 0 : \begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 1 \end{cases} \quad (16.8)$$

$$\text{sinon} : \begin{cases} P_2 = \frac{1}{\Delta_3} \end{cases} \quad (16.9)$$

3. Calcul de la position du récepteur principal à l'époque t (par moyenne pondérée) :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{o_t}^{\text{WGS84}} = \left(\frac{P_1 \cdot \mathbf{x}_i + P_2 \cdot \mathbf{x}_{i+1}}{P_1 + P_2} \right) \quad (16.10)$$

On obtient alors la position de l'antenne principale (confondue avec le topocentre) pour chaque époque d'observation GNSS.

Si l'on souhaite simuler une attitude tangente à la trajectoire, on peut calculer la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ selon les formules suivantes, en transformant au préalable les points de la trajectoire lissée dans le système topo :

$$\mathbf{e}_y^{\text{body}} = \frac{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{topo}} - \mathbf{x}_i^{\text{topo}}}{|\mathbf{x}_{i+1}^{\text{topo}} - \mathbf{x}_i^{\text{topo}}|} \quad (16.11)$$

Les vecteurs de base $\mathbf{e}_x^{\text{body}}$ et $\mathbf{e}_z^{\text{body}}$ se calculent comme suit :

$$\mathbf{e}_x^{\text{body}} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}}|} \quad (16.12)$$

$$\mathbf{e}_z^{\text{body}} = \mathbf{e}_x^{\text{body}} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad (16.13)$$

Avec :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (16.14)$$

On peut alors former la matrice rotation $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$:

$$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} = (\mathbf{e}_x^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}}) \quad (16.15)$$

16.5 Position des récepteurs selon attitude de la plateforme

A partir de la position cartésienne WGS84 de l'antenne principale de la plateforme, on peut trouver les coordonnées des autres récepteurs en utilisant la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$, définie selon des angles donnés ou par les vecteurs de base d'un système parallèle à la trajectoire.

$$\mathbf{x}_1^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_o^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{x}_1^{\text{body}} \quad (16.16)$$

$$\mathbf{x}_2^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_o^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{x}_2^{\text{body}} \quad (16.17)$$

$$\mathbf{x}_3^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_o^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{x}_3^{\text{body}} \quad (16.18)$$

$$\mathbf{x}_4^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_o^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{x}_4^{\text{body}} \quad (16.19)$$

On répète ces calculs pour l'ensemble des époques d'observations GNSS souhaitées afin d'obtenir un jeu de positions WGS84 pour chaque antenne.

16.6 Simulation des observations GNSS

Une étape importante de ce travail a été de développer un simulateur d'observations GNSS au format RINEX 3.02. On aurait évidemment pu effectuer des mesures directement sur le terrain à l'aide de récepteurs GNSS sans passer par cette étape de simulation. Cependant, un simulateur présente plusieurs avantages : premièrement, il permet de modéliser des données que l'on gère totalement. On peut par exemple introduire des erreurs d'horloge ou des sauts de cycles de façon volontaire et maîtrisée. Dans la réalité, on ne peut a priori pas savoir si la mesure est entachée d'une erreur ou non.

L'autre avantage est que l'on peut générer autant de données et autant de configurations que l'on souhaite, sans devoir retourner sur le terrain à tout moment.

Les données simulées serviront par la suite à développer et tester des algorithmes de calcul d'orientation 3D qui pourront ensuite être validés et confirmés par des mesures réelles.

Pour simuler des observations GNSS, il est nécessaire de connaître les éléments suivants :

- Epoque d'observation (temps GPS)
- Position des récepteurs (déterminée par le simulateur de trajectoire) à l'époque d'observation
- Position des satellites (déterminée selon les éphémérides disponibles dans le fichier de navigation)
- Erreur d'horloge des récepteurs (par défaut, on admet qu'il n'y a pas d'erreur d'horloge) [m]
- Bruit à simuler sur les observations de pseudo-distances et les observations de phase
- Ambiguïté à simuler (si l'on souhaite générer des sauts de cycle) (par défaut, l'ambiguïté simulée vaut 0)

La simulation des observations GNSS se déroule selon les étapes décrites ci-dessous.

1. Transformation de l'époque de simulation en date julienne modifiée.

On admet que l'époque de simulation est directement donnée dans le référentiel temporel GPS. Cela évite de devoir calculer des conversions entre le temps UTC et le temps GPS.

$$\text{year, month, day, hour, minute, second} \Rightarrow \text{MJD}_{\text{day}}, \text{MJD}_{\text{sec of day}} \quad (16.20)$$

2. Chargement du fichier de navigation.

Pour la simulation, un fichier de navigation issu de mesures réelles du 24 juin 2020 a été utilisé. Toutefois, si l'on veut simuler des observations GNSS à une autre époque, il est nécessaire de télécharger le fichier de navigation correspondant. Pour cela, un script a été développé qui permet de télécharger les éphémérides diffusées ainsi que les orbites précises pour les systèmes GPS et GLONASS. Les fichiers téléchargés correspondent aux fichiers de navigation reçus par la géostation de Zimmerwald. Dans ce projet, on utilise uniquement les éphémérides diffusées.

3. Pour chaque satellite de la constellation, vérification si des données d'éphémérides récentes sont disponibles.
4. Simulation des observations.

Tout d'abord, on calcule l'observation sur le code en suivant les étapes :

1. Calcul de l'erreur d'horloge du récepteur en secondes

$$dt_r = \frac{cdt_r}{c} \quad (16.21)$$

Avec :

$$\begin{aligned} dt_r & \text{ Erreur d'horloge du récepteur [s]} \\ cdt_r & \text{ Erreur d'horloge du récepteur [m]} \\ c & \text{ Vitesse de la lumière dans le vide } \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \end{aligned}$$

2. Calcul du temps du récepteur au moment de la réception du signal (en corrigeant de l'erreur d'horloge du récepteur)

$$t_r = \text{MJD}_{\text{day}}, \text{MJD}_{\text{sec of day}} + dt_r \quad (16.22)$$

3. Calcul de la position du satellite au temps de la *réception* (avec les éléments de Kepler)
4. Puisque l'on ne connaît pas exactement le moment de l'émission du signal, on calcule d'abord la distance approximative entre le satellite au temps de la réception et le récepteur au temps de la réception

$$r_0 = |\mathbf{x}_{\text{sat}}^{\text{rec}} - \mathbf{x}_{\text{rover}}^{\text{rec}}| \quad (16.23)$$

5. Cela permet d'en déduire le temps de l'émission t_{em} du signal :

$$t_{em} = t_r - \frac{r_0}{c} \quad (16.24)$$

6. Calcul de la position du satellite au temps de l'émission (avec les éléments de Kepler)
7. Correction de l'effet Sagnac
8. Calcul de la mesure sur le code (en tenant compte des erreurs d'horloge et des erreurs atmosphériques (Klobuchar et Saastamoinen))

$$P_A^i = |\mathbf{x}_{\text{sat}}^{\text{em}} - \mathbf{x}_{\text{rover}}^{\text{rec}}| + c \cdot dt_r - c \cdot dt_{\text{sat}} + d_{\text{ion}} + d_{\text{trop}} \quad (16.25)$$

9. Calcul de la mesure de phase en simulant une ambiguïté de zéro-différence :

$$\Phi_A^i = \frac{P_A^i}{\lambda} - N_A^i \quad (16.26)$$

10. Ajout de bruit sur les observations

$$P_A^i = P_A^i + v_{P_A^i} \quad (16.27)$$

$$\Phi_A^i = \Phi_A^i + v_{\Phi_A^i} \quad (16.28)$$

Le bruit simulée est générée aléatoirement selon une distribution normale, en utilisant un écart-type de 1 m pour les observations sur le code et un écart-type de 0.002 m pour les observations sur la phase.

11. Calcul de la mesure Doppler

$$D_r^s = \frac{d\Phi_A^i}{dt} \quad (16.29)$$

Pour simuler la mesure Doppler, on calcule la dérivée temporelle de la phase déduite simplement de deux observations de phase à un intervalle de temps très proche.

En sortie, on obtient un fichier d'observations RINEX pour chaque récepteur.

```

3.02          OBSERVATION DATA      M: MIXED          RINEX VERSION / TYPE
SCHWYN        20220623 063159 UTC PGM / RUN BY / DATE
0716062416281426  MARKER NAME
0716          MARKER NUMBER
1530716      LEICA GS10              8.00.654/7.500    OBSERVER / AGENCY
              LEIAS10              NONE              REC # / TYPE / VERS
              APPROX POSITION XYZ
4346447.5702  507307.5047  4625282.1884    ANTENNA: DELTA H/E/N
              0.0000              0.0000              0.0000
G  12 C1C L1C D1C S1C C2W L2W D2W S2W C5Q L5Q D5Q S5Q    SYS / # / OBS TYPES
E  16 C1C L1C D1C S1C C5Q L5Q D5Q S5Q C7Q L7Q D7Q S7Q    SYS / # / OBS TYPES
              C8Q L8Q D8Q S8Q    SYS / # / OBS TYPES
R   8 C1C L1C D1C S1C C2P L2P D2P S2P    SYS / # / OBS TYPES
2020   06   24   14   29   24.0000000    GPS    TIME OF FIRST OBS
2020   06   24   14   30   19.0000000    GPS    TIME OF LAST OBS
18    18  1929    7                                LEAP SECONDS
                                                END OF HEADER

```

```

> 2020 06 24 14 29 24.0000000 0 10
G01 22594265.793 118733668.12857 2819.521 45.000
G08 20328961.219 106829412.24407 272.335 45.000
G10 21653812.155 113791550.90227 -1904.144 45.000
G11 20956747.919 110128453.62154 2260.084 45.000
G16 24486818.838 128679101.50390 -3794.586 45.000
G20 23778893.219 124958927.26883 -3331.858 45.000
G21 23938803.299 125799260.40928 -2460.611 45.000
G22 23675845.094 124417405.71699 3430.124 45.000
G27 21029941.707 110513089.57399 -1975.801 45.000
G32 23338677.256 122645576.76981 2541.090 45.000

```

A partir des données simulées, on peut effectuer les calculs comme s'il s'agissait de mesures réelles.

17 Stratégie de calcul

Ce chapitre explique les principales étapes de la stratégie de calcul pour déterminer l'orientation 3D de la plateforme. Le calcul des angles d'attitude est effectué selon les étapes suivantes :

1. Import des éphémérides
2. Import des observations de l'antenne principale
3. Import des observations des antennes secondaires
4. Calcul de la position sur le code des antennes
5. Détection des sauts de cycles
6. Calcul des inconnues approchées
7. Calcul avec ambiguïtés flottantes
8. Résolution des ambiguïtés avec l'algorithme LAMBDA
9. Calcul avec ambiguïtés fixées

17.1 Import des éphémérides

Les éphémérides GPS sont chargées depuis un fichier de navigation. Les éléments de Kepler sont alors stockés dans un dictionnaire et seront utilisés pour le calcul de la position des satellites. Puisque chaque récepteur reçoit le même fichier de navigation, on peut prendre n'importe lequel, pour autant que la date du fichier de navigation corresponde à la date des observations. Pour les données réelles, le fichier de navigation est directement fourni par le récepteur GNSS. Pour les données simulées, il est nécessaire d'utiliser le fichier de navigation qui a servi à générer les observations.

17.2 Import des données des récepteurs

Les observations contenues dans les fichiers RINEX de chaque récepteur sont chargées dans le programme afin de pouvoir accéder ultérieurement aux mesures sur le code et sur la phase. Le récepteur placé à l'origine du système body est enregistré comme récepteur de base. Les autres récepteurs sont stockés dans une liste de récepteurs qui peut contenir le nombre de récepteurs souhaités.

17.3 Calcul sur le code

La première étape du calcul est de déterminer une position approchée sur le code pour l'antenne principale. Cela permet de déterminer la position approximative de la plateforme afin de définir la matrice de rotation entre le système TRS et le système topo qui dépend des coordonnées ellipsoïdales du lieu où l'on se trouve. Par ailleurs, si l'on calcule une position sur le code pour chaque récepteur, il est possible de déterminer par la suite des quaternions approchés servant à former la matrice de rotation entre le système body et le système topo.

17.4 Pré-traitements

Avant d'entrer dans le calcul d'ajustement de l'attitude par les moindres carrés, il est nécessaire d'effectuer un certain nombre de traitements préliminaires.

17.4.1 Préparation des observations de double-différences

Tout d'abord, on peut se demander quelles sont les observations utilisées dans le calcul. En effet, l'équation d'observation de la détermination de l'orientation 3D de la plateforme n'utilise pas directement les observations de zéro-différence brutes présentes dans le fichier RINEX, mais nécessite des observations de double-différence en entrée. Ainsi, il est nécessaire de réaliser un premier traitement des mesures afin de calculer les observations de double-différences. Pour cela, on forme des lignes de base entre l'antenne principale et chaque antenne secondaire et au niveau des satellites, on définit un satellite de référence et on forme des paires avec chacun des satellites restants. Le nombre d'observations de double-différences est donné par la formule suivante :

$$\text{Nb DD obs} = (\text{Nb satellites} - 1) \cdot (\text{Nb antennes} - 1) \quad (17.1)$$

Cette étape permet de constituer le vecteur des observations. Il est utile de préciser que cette étape préliminaire sert également à trier les observations en appliquant un masque d'élévation. Ainsi, toutes les observations sur des satellites qui se trouvent trop bas sur l'horizon reçoivent un poids proche de 0 afin qu'elles n'influencent pas le calcul.

17.4.2 Détection des sauts de cycles

Il est nécessaire de détecter les sauts de cycles avant d'effectuer le calcul proprement dit. Pour cela, il est nécessaire de calculer la triple-différence, qui correspond simplement à la différence de deux double-différences consécutives dans le temps. Si un saut de cycle est détecté, on peut ajouter des ambiguïtés dans le vecteur des inconnues ou simplement supprimer les observations liées aux satellites qui présentent des sauts de cycle. Toutefois, cette deuxième solution un peu brutale réduit le nombre d'observations disponibles pour le calcul.

17.5 Détermination des inconnues approchées

Pour permettre au calcul de converger plus facilement, il faut calculer les valeurs approchées des inconnues à estimer. Il y a deux types d'inconnues dans le calcul : on y trouve les ambiguïtés de double-différence et les 4 composantes du quaternion pour chaque époque de calcul. Pour permettre au calcul d'ajustement par les moindres carrés de converger plus rapidement, il est nécessaire de lui fournir des valeurs initiales des inconnues assez proches des valeurs vraies.

17.5.1 Initialisation des ambiguïtés

Pour l'estimation des ambiguïtés de double-différences, il est nécessaire de fournir des valeurs initiales des inconnues au début du calcul. Pour cela, on pourrait simplement initialiser les valeurs à 0, mais comme les ambiguïtés de double-différences peuvent être très grandes, il vaut mieux fournir des valeurs initiales plus proches de la réalité.

Puisque les antennes enregistrent à la fois une mesure sur le code et une mesure sur la phase, on peut facilement calculer la valeur approchée de l'ambiguïté de zéro-différence.

Mesure sur le code :

$$P_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| + c \cdot \delta t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (17.2)$$

Mesure sur la phase (multipliée par la longueur d'onde) :

$$L_A^i = \lambda \cdot \Phi_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_A^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (17.3)$$

Lorsque l'on calcule la différence entre la mesure sur le code et la mesure sur la phase multipliée par la longueur d'onde, les erreurs dues à la ionosphère et à la troposphère ainsi que les erreurs d'horloges disparaissent.

$$P_A^i - L_A^i = P_A^i - \lambda \cdot \Phi_A^i = \lambda \cdot N_A^i \quad (17.4)$$

On peut alors trouver facilement la valeur de l'ambiguïté de zéro-différence :

$$N_A^i = \frac{P_A^i}{\lambda} - \Phi_A^i \quad (17.5)$$

Exemple numérique :

$$N_A^i = \frac{P_A^i}{\lambda} - \Phi_A^i = \frac{20327410.132}{0.1902936728} - 106821251.230 = 10 \quad (17.6)$$

Puisque l'on cherche l'ambiguïté de double-différence, il est nécessaire de calculer la simple-différence puis la double-différence. Ce calcul nécessite quatre observations de zéro-différence en utilisant les satellites i et j et les récepteurs A et B.

$$L_A^i = \lambda \cdot \Phi_A^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_A^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{A,trop}^i + \delta \rho_{A,iono}^i \quad (17.7)$$

$$L_B^j = \lambda \cdot \Phi_B^j = |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - \lambda \cdot N_B^j + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_j} + \delta \rho_{B,trop}^j + \delta \rho_{B,iono}^j \quad (17.8)$$

$$L_A^j = \lambda \cdot \Phi_A^j = |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_A^j + c \cdot \delta t_{rec}^{recA} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_j} + \delta \rho_{A,trop}^j + \delta \rho_{A,iono}^j \quad (17.9)$$

$$L_B^i = \lambda \cdot \Phi_B^i = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| - \lambda \cdot N_B^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{em}^{sat_i} + \delta \rho_{B,trop}^i + \delta \rho_{B,iono}^i \quad (17.10)$$

Le calcul des simple-différences est le suivant :

$$L_B^j - L_A^i = \lambda \cdot \Phi_B^j - \lambda \cdot \Phi_A^i \quad (17.11)$$

$$= |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - \lambda \cdot N_B^j + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - (|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_A^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recA}) \quad (17.12)$$

$$= |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_B^j + \lambda \cdot N_A^i + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{rec}^{recA} \quad (17.13)$$

$$L_B^j - L_A^j = \lambda \cdot \Phi_B^j - \lambda \cdot \Phi_A^j \quad (17.14)$$

$$= |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - \lambda \cdot N_B^j + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - (|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_A^j + c \cdot \delta t_{rec}^{recA}) \quad (17.15)$$

$$= |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_B^j + \lambda \cdot N_A^j + c \cdot \delta t_{rec}^{recB} - c \cdot \delta t_{rec}^{recA} \quad (17.16)$$

La double-différence est alors la suivante :

$$(L_B^j - L_A^j) - (L_B^i - L_A^i) = |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_B^j + \lambda \cdot N_A^j - (|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_B^i + \lambda \cdot N_A^i) \quad (17.17)$$

$$= |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| + |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \lambda \cdot N_B^j + \lambda \cdot N_A^j + \lambda \cdot N_B^i - \lambda \cdot N_A^i \quad (17.18)$$

$$= |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_B| - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_A| - |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_B| + |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}_A| - \nabla \Delta N_{AB}^{ij} \quad (17.19)$$

On peut alors en déduire la valeur approchée des ambiguïtés de double-différences :

$$\nabla \Delta N_{AB}^{ij} = -(-N_B^j + N_A^j + N_B^i - N_A^i) \quad (17.20)$$

$$\boxed{\nabla \Delta N_{AB}^{ij} = N_B^j - N_A^j - N_B^i + N_A^i} \quad (17.21)$$

17.5.2 Détermination des quaternions approchés

Pour que le calcul converge plus rapidement, il est nécessaire de fournir des valeurs approchées pour les quaternions à estimer. Pour cela, plusieurs stratégies sont possibles, en utilisant la position sur le code des antennes, transformée dans le système topo.

1. Calcul de l'orientation de la plateforme à partir d'angles approchés constants
2. Calcul de l'orientation de la plateforme via un calcul d'Helmert 3D à partir des positions sur le code de chaque récepteur dans le système topo
3. Calcul de l'orientation de la plateforme via un repère parallèle à la trajectoire, défini par la position sur le code de deux antennes disposées parallèlement à l'axe y de la plateforme dans le système topo
4. Calcul de l'orientation de la plateforme via un repère parallèle à la trajectoire, défini par la position sur le code du récepteur principal à deux époques successives dans le système topo
5. Calcul de l'orientation de la plateforme à partir d'angles approchés issus d'une centrale inertielle ou d'un calcul par lignes de base cinématiques

17.5.3 Angles approchés constants

Cette solution est la plus simple et peut convenir dans le cas d'une trajectoire durant laquelle l'attitude ne varie pas beaucoup (p. ex. une trajectoire rectiligne). En effet, la matrice de rotation \mathbf{R}_{body}^{topo} est simplement calculée par rapport aux trois angles y_{body}^{topo} , p_{body}^{topo} et r_{body}^{topo} définis par l'utilisateur comme valeurs approchées. A partir de la matrice de rotation, on peut déduire le quaternion unitaire correspondant. Le même quaternion approché est alors utilisé pour chaque époque de calcul. Par exemple, si la trajectoire est orientée en direction du nord-est, les valeurs angulaires seraient de 45° pour y_{body}^{topo} , 0° pour p_{body}^{topo} et 0° pour r_{body}^{topo} en admettant que les rotations autour des axes x et y soient faibles.

Cette stratégie n'est toutefois pas adaptée dans les cas où la plateforme subit d'importantes variations d'attitude.

17.5.4 Angles approchés variables

Dans le cas d'une trajectoire quelconque, il est intéressant de fournir des quaternions approchés différents pour chaque époque. Mais pour cela, il est nécessaire de connaître ces valeurs approchées. On peut les trouver de plusieurs manières différentes.

— Repère parallèle à la trajectoire

Tout d'abord, on peut les calculer via un repère parallèle à la trajectoire, défini par la position sur le code dans le système topo de deux antennes disposées parallèlement à la trajectoire. Cette solution implique toutefois que l'angle autour de l'axe y de la plateforme est nul. Cela ne pose pas forcément de problème particulier, puisque les angles autour des axes x et y sont souvent assez proches de 0. Le problème avec cette méthode est que l'imprécision de la position approchée sur le code peut avoir des effets angulaires importants, surtout si la ligne de base entre les antennes est courte.

— **Repère parallèle à la trajectoire (deux époques successives)**

Pour bénéficier d'une ligne de base plus longue, on peut calculer un repère parallèle à la trajectoire en utilisant uniquement la position sur le code de l'antenne principale à deux époques successives. Là aussi, l'angle autour de l'axe y de la plateforme est supposé nul. Cette solution peut fonctionner si la plateforme se déplace, mais si elle est à l'arrêt, la position de l'antenne ne varie pas entre deux époques et il est donc impossible de calculer l'attitude.

— **Helmert 3D**

Un autre moyen de calculer la matrice de rotation approchée est de passer par un calcul de Helmert 3D. En effet, en calculant une position sur le code pour chaque antenne, on obtient un jeu de coordonnées dans le système WGS84. On applique ensuite la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\text{WGS84}}^{\text{topo}}$ pour passer du système WGS84 au système topo. Connaissant les coordonnées des antennes dans le système body, on peut alors simplement calculer la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ entre les deux systèmes, à l'aide d'un calcul de Helmert 3D. L'avantage de cette méthode est de pouvoir être appliquée quel que soit le nombre d'antennes utilisées et permet de calculer des valeurs approchées pour les rotations autour des trois axes, ce qui n'est pas possible avec la méthode du repère parallèle à la trajectoire. Puisque les positions des antennes sont calculées sur le code et que les lignes de base sont courtes, cette solution est limitée par la faible précision du positionnement sur le code.

— **Angles approchés issus d'une centrale inertielle ou d'un calcul par lignes de base cinématiques**

La dernière méthode est d'utiliser des angles approchés plus précis, mesurés ou calculés pour chaque époque à l'aide d'une centrale inertielle ou d'un calcul indépendant par moving-baseline.

Dans ce projet, les coordonnées approchées des antennes ont été calculées par positionnement simple sur le code, mais il faudrait idéalement calculer une ligne de base entre l'antenne principale et chaque récepteur secondaire via un calcul différentiel afin d'annuler les erreurs atmosphériques et les erreurs d'horloges des récepteurs, ce qui donnerait une valeur approchée plus précise. Si la trajectoire est régulière, c'est-à-dire si les angles d'attitude ne varient pas beaucoup tout au long du parcours de la plateforme, on pourrait s'affranchir de cette étape d'initialisation du quaternion approché (en donnant une valeur approchée constante). Toutefois, si les angles varient beaucoup (p. ex. dans le cas d'une route sinueuse ou un giratoire), le calcul risque de ne pas converger sur les bonnes valeurs des inconnues.

17.6 Estimation avec ambiguïtés flottantes

Puisque l'on utilise des observations de double-différences de phase, il est nécessaire de procéder à un premier calcul d'ajustement dans lequel on estime des ambiguïtés flottantes. Comme le vecteur des inconnues n'est pas uniquement composé d'ambiguïtés mais qu'il contient également les composantes des quaternions pour chaque époque, on peut mettre en oeuvre deux solutions de calcul. Si les valeurs approchées des composantes des quaternions ne sont pas précises, on estime toutes les inconnues, sans ajouter de contraintes supplémentaires dans le calcul. Mais si les valeurs approchées des composantes des quaternions sont assez proches de la valeur vraie, on peut fixer ces valeurs en introduisant des conditions dans l'estimation et ainsi on ne doit estimer que les valeurs des ambiguïtés flottantes. Cette solution n'est toutefois pas recommandée, car le calcul devrait pouvoir converger assez facilement sans devoir fixer des inconnues.

17.7 Résolution des ambiguïtés avec LAMBDA

A partir des ambiguïtés flottantes estimées dans le calcul précédent et de la matrice de variance-covariance des ambiguïtés estimées, l'algorithme LAMBDA effectue une résolution des ambiguïtés, en utilisant la méthode search-and-shrink basée sur une estimation par les moindres carrés (Integer Least Squares). Les ambiguïtés ainsi fixées peuvent être utilisées dans le calcul suivant.

17.8 Estimation avec ambiguïtés fixées

Après avoir fixé les ambiguïtés en utilisant l'algorithme de recherche LAMBDA, on effectue un second calcul d'ajustement, dans lequel seules les inconnues des quaternions sont libérées. Pour cela, on ajoute des conditions dans le calcul pour forcer les ambiguïtés à rester fixes. Les valeurs approchées des composantes des quaternions sont les mêmes que celles utilisées lors de l'estimation flottante. On pourrait toutefois utiliser les quaternions ajustés du premier calcul comme valeurs approchées pour le deuxième calcul, ce qui permettrait une convergence plus rapide.

A la fin du calcul, les quaternions estimés sont transformés en valeurs angulaires et leur précision est calculée via une propagation d'erreur. Un listing de calcul est exporté et contient les valeurs estimées des quaternions et des angles ainsi que leur précision. On y trouve également la liste de toutes les observations avec leurs résidus, de même que les valeurs des ambiguïtés fixées.

Quatrième partie

Tests et expérimentations pratiques

18 Données simulées

18.1 Simulation de la trajectoire

Pour réaliser les tests avec des données simulées, une trajectoire a été générée en cliquant des points sur le géoportail créé en Python. La trajectoire en bleu sur la figure 11 représente le parcours d'un véhicule à Yverdon-les-Bains, en passant notamment par un giratoire afin d'avoir une variation de l'attitude et de ne pas avoir une trajectoire trop rectiligne.

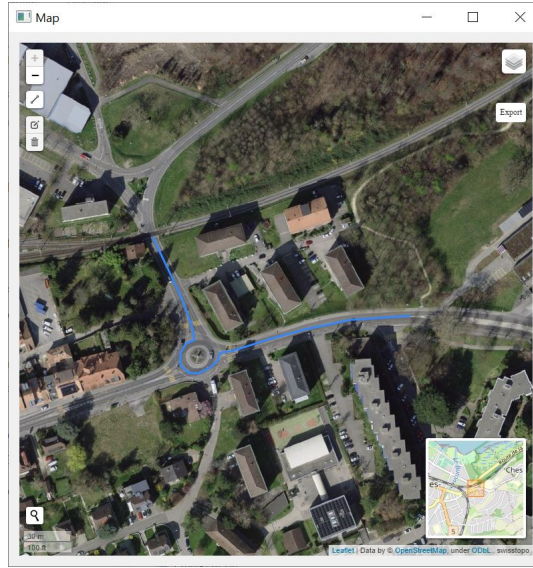


FIGURE 11 – Trajectoire

Les coordonnées WGS84 ellipsoïdales des points cliqués ont été transformées en coordonnées WGS84 cartésiennes, en utilisant une hauteur ellipsoïdale constante de 450 m pour tous les points. En effet, le géoportail n'a pas de composante altimétrique puisque les points sont cliqués uniquement en 2D.

N° point cliqué	λ	φ	h	x^{WGS84}	y^{WGS84}	z^{WGS84}
1	6.655333	46.779168	450.0	4346430.021	507153.317	4625315.364
2	6.655553	46.778852	450.0	4346453.502	507172.973	4625291.306
3	6.655644	46.778683	450.0	4346466.296	507181.463	4625278.440
4	6.655655	46.778643	450.0	4346469.417	507182.673	4625275.394
5	6.655666	46.778606	450.0	4346472.297	507183.855	4625272.577
6	6.655596	46.778584	450.0	4346474.687	507178.752	4625270.902
7	6.655553	46.778532	450.0	4346479.252	507175.978	4625266.943
8	6.655553	46.778466	450.0	4346484.563	507176.598	4625261.918
9	6.655617	46.778426	450.0	4346487.215	507181.828	4625258.873
10	6.655692	46.778422	450.0	4346486.873	507187.555	4625258.568
11	6.655768	46.778444	450.0	4346484.430	507193.114	4625260.243
12	6.655848	46.778488	450.0	4346480.181	507198.770	4625263.593
13	6.655875	46.778536	450.0	4346476.080	507200.367	4625267.248
14	6.655982	46.778547	450.0	4346474.247	507208.381	4625268.085
15	6.656245	46.778606	450.0	4346467.172	507227.778	4625272.577
16	6.656556	46.778665	450.0	4346459.671	507250.817	4625277.069
17	6.656921	46.778716	450.0	4346452.335	507278.027	4625280.952
18	6.657393	46.778738	450.0	4346446.386	507313.626	4625282.627

A partir des points cliqués puis transformés en coordonnées WGS84 cartésiennes, une spline a été calculée pour lisser la trajectoire. Pour garder au mieux la forme du giratoire, plusieurs points assez proches les uns des autres ont été saisis afin d'affiner la spline dans le giratoire. Cette spline a ensuite été discrétisée en plusieurs points consécutifs très proches les uns des autres. Cette étape sert uniquement à lisser la trajectoire, mais on pourrait

imaginer que l'utilisateur saisisse beaucoup de points à intervalles très proches pour avoir une trajectoire assez lisse sans utiliser de spline.

Pour modéliser la dynamique de la plateforme, un modèle cinématique a été calculé, en fonction des accélérations le long de la trajectoire. L'utilisateur peut saisir les informations d'accélération (temps début, temps fin et valeur de l'accélération) dans le fichier des paramètres de la simulation. Dans cet exemple, la plateforme est à l'arrêt durant les 5 premières secondes, puis subit diverses accélérations qui déterminent la vitesse et la position à chaque époque.

	Temps début	Temps fin	Accélération [$\frac{m}{s^2}$]
1	0	5	+0.0
2	5	7	+0.5
3	10	13	+2.0
4	20	23	-2.0
5	35	38	+2.0

La figure 12 présente l'accélération, la vitesse et la distance curviligne en fonction du temps.

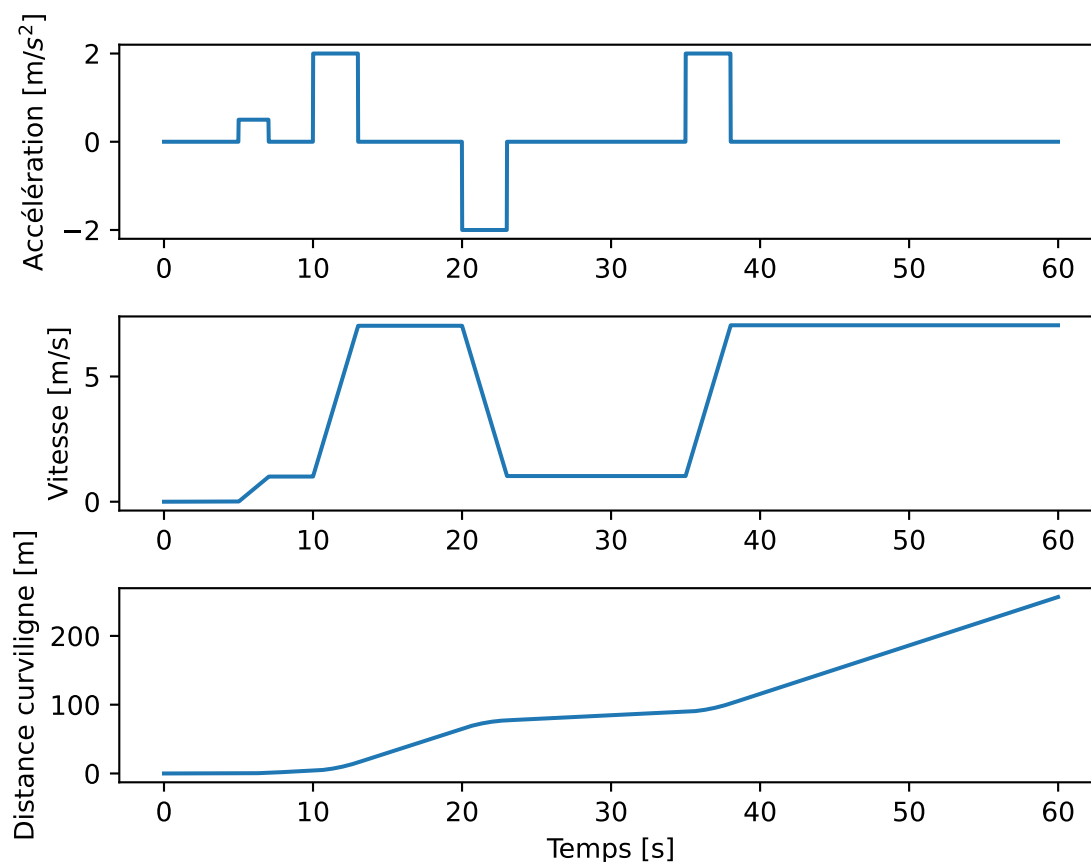


FIGURE 12 – Modèle cinématique de la plateforme

Grâce à un calcul d'interpolation de l'abscisse curviligne, on obtient ainsi points en coordonnées WGS84 cartésiennes interpolés sur la trajectoire à une fréquence de 1 Hz, ce qui signifie qu'on a un point par seconde. Ces coordonnées correspondent aux coordonnées du topocentre dans le système WGS84 à chaque époque (voir tableau ci-dessous).

Epoque	Accélération	Vitesse	Abscisse curviligne	x_o^{WGS84}	y_o^{WGS84}	z_o^{WGS84}
0	+0.0	+0.000	0.000	4346430.1520	507153.2472	4625315.2502
1	+0.0	+0.000	0.000	4346430.1520	507153.2472	4625315.2502
2	+0.0	+0.000	0.000	4346430.1520	507153.2472	4625315.2502
3	+0.0	+0.000	0.000	4346430.1520	507153.2472	4625315.2502
4	+0.0	+0.000	0.000	4346430.1520	507153.2472	4625315.2502
5	+0.0	+0.000	0.000	4346430.1520	507153.2472	4625315.2502
6	+0.5	+0.495	0.247	4346430.1741	507153.2759	4625315.2264
7	+0.5	+0.995	0.995	4346430.5567	507153.7695	4625314.8156
8	+0.0	+1.005	2.000	4346431.0738	507154.4290	4625314.2611
9	+0.0	+1.005	3.005	4346431.5942	507155.0839	4625313.7040
10	+0.0	+1.005	4.010	4346432.1179	507155.7340	4625313.1444
11	+2.0	+2.985	6.005	4346433.1671	507157.0101	4625312.0260
12	+2.0	+4.985	10.000	4346435.3078	507159.5049	4625309.7562
13	+2.0	+6.985	15.995	4346438.6214	507163.0858	4625306.2731
14	+0.0	+7.025	23.020	4346442.6647	507167.0026	4625302.0725
15	+0.0	+7.025	30.045	4346446.8883	507170.5716	4625297.7414
16	+0.0	+7.025	37.070	4346451.2984	507173.7313	4625293.2807
17	+0.0	+7.025	44.095	4346455.8977	507176.4057	4625288.6963
18	+0.0	+7.025	51.120	4346460.6815	507178.5031	4625284.0026
19	+0.0	+7.025	58.145	4346465.6317	507179.9171	4625279.2279
20	+0.0	+7.025	65.170	4346470.7103	507180.5353	4625274.4200
21	-2.0	+5.045	71.205	4346475.1274	507180.3532	4625270.3168
22	-2.0	+3.045	75.240	4346478.0816	507179.8681	4625267.6121
23	-2.0	+1.045	77.275	4346479.5706	507179.5991	4625266.2515
24	+0.0	+1.025	78.300	4346480.3215	507179.4864	4625265.5629
25	+0.0	+1.025	79.325	4346481.0728	507179.4048	4625264.8705
26	+0.0	+1.025	80.350	4346481.8233	507179.3721	4625264.1735
27	+0.0	+1.025	81.375	4346482.5695	507179.4137	4625263.4724
28	+0.0	+1.025	82.400	4346483.3010	507179.5690	4625262.7727
29	+0.0	+1.025	83.425	4346483.9923	507179.8939	4625262.0921
30	+0.0	+1.025	84.450	4346484.5959	507180.4354	4625261.4696
31	+0.0	+1.025	85.475	4346485.0702	507181.1745	4625260.9464
32	+0.0	+1.025	86.500	4346485.3989	507182.0556	4625260.5436
33	+0.0	+1.025	87.525	4346485.5897	507183.0206	4625260.2604
34	+0.0	+1.025	88.550	4346485.6620	507184.0266	4625260.0833
35	+0.0	+1.025	89.575	4346485.6346	507185.0470	4625259.9978
36	+2.0	+3.005	91.590	4346485.3469	507187.0376	4625260.0495
37	+2.0	+5.005	95.605	4346484.1757	507190.8083	4625260.7320
38	+2.0	+7.005	101.620	4346481.7365	507196.0291	4625262.4402
39	+0.0	+7.045	108.665	4346478.5086	507201.8191	4625264.8225
40	+0.0	+7.045	115.710	4346475.2186	507207.5479	4625267.2695
41	+0.0	+7.045	122.755	4346472.0892	507213.4322	4625269.5497
42	+0.0	+7.045	129.800	4346469.2101	507219.5343	4625271.5725
43	+0.0	+7.045	136.845	4346466.5905	507225.8321	4625273.3316
44	+0.0	+7.045	143.890	4346464.2295	507232.2970	4625274.8312
45	+0.0	+7.045	150.935	4346462.1158	507238.8987	4625276.0851
46	+0.0	+7.045	157.980	4346460.2284	507245.6068	4625277.1162
47	+0.0	+7.045	165.025	4346458.5380	507252.3939	4625277.9547
48	+0.0	+7.045	172.070	4346457.0095	507259.2371	4625278.6359
49	+0.0	+7.045	179.115	4346455.6043	507266.1174	4625279.1980
50	+0.0	+7.045	186.160	4346454.2820	507273.0204	4625279.6803
51	+0.0	+7.045	193.205	4346453.0024	507279.9341	4625280.1214
52	+0.0	+7.045	200.250	4346451.7267	507286.8488	4625280.5589
53	+0.0	+7.045	207.295	4346450.4181	507293.7553	4625281.0280
54	+0.0	+7.045	214.340	4346449.0427	507300.6440	4625281.5613
55	+0.0	+7.045	221.385	4346447.5702	507307.5047	4625282.1884

Ces coordonnées servent de base pour la suite. En effet, à partir de cette trajectoire du topocentre, les coordonnées des antennes ont été déterminées. Connaissant la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et les coordonnées des antennes dans le système body, on peut facilement calculer la position des antennes dans le système topo d'après

la formule ci-dessous.

$$\mathbf{x}_A^{\text{topo}} = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} \cdot \mathbf{x}_A^{\text{body}} \quad (18.1)$$

La configuration de la plateforme pour la simulation est présentée sur la figure 13. Cinq récepteurs sont placés sur la plateforme, avec le récepteur principal au centre de cette dernière.

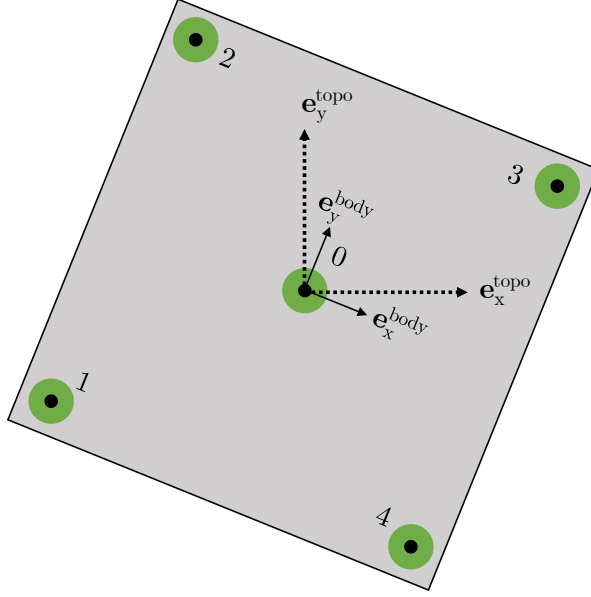


FIGURE 13 – Configuration de la plateforme pour les simulations

Les coordonnées des antennes dans le système body sont les suivantes :

N° antenne	x^{body}	y^{body}	z^{body}
0	+0.0	+0.0	+0.0
1	-1.0	+1.0	+0.0
2	+1.0	+1.0	+0.0
3	+1.0	-1.0	+0.0
4	-1.0	-1.0	+0.0

On définit la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}$ à partir des angles autour des trois axes ($y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ autour de l'axe z de la plateforme, $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ autour de l'axe y de la plateforme et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$ autour de l'axe x de la plateforme). L'exemple illustratif ci-dessous présente le cas d'une rotation de 30° autour de l'axe z de la plateforme.

$$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(y_{\text{body}}^{\text{topo}}, p_{\text{body}}^{\text{topo}}, r_{\text{body}}^{\text{topo}}) = \mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}}(+30.0, 0.0, 0.0) = \begin{pmatrix} +0.8660 & -0.5000 & +0.0000 \\ +0.5000 & +0.8660 & +0.0000 \\ +0.0000 & +0.0000 & +1.0000 \end{pmatrix} \quad (18.2)$$

$$\mathbf{x}_1^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} +0.8660 & -0.5000 & +0.0000 \\ +0.5000 & +0.8660 & +0.0000 \\ +0.0000 & +0.0000 & +1.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.0000 \\ +1.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3660 \\ +0.3660 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (18.3)$$

$$\mathbf{x}_2^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} +0.8660 & -0.5000 & +0.0000 \\ +0.5000 & +0.8660 & +0.0000 \\ +0.0000 & +0.0000 & +1.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1.0000 \\ +1.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.3660 \\ +1.3660 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (18.4)$$

$$\mathbf{x}_3^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} +0.8660 & -0.5000 & +0.0000 \\ +0.5000 & +0.8660 & +0.0000 \\ +0.0000 & +0.0000 & +1.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1.0000 \\ -1.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1.3660 \\ -0.3660 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (18.5)$$

$$\mathbf{x}_4^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} +0.8660 & -0.5000 & +0.0000 \\ +0.5000 & +0.8660 & +0.0000 \\ +0.0000 & +0.0000 & +1.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1.0000 \\ -1.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3660 \\ -1.3660 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (18.6)$$

Pour calculer les coordonnées des antennes dans le système WGS84, il est nécessaire d'utiliser la formule suivante :

$$\mathbf{x}_1^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_0^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{x}_1^{\text{topo}} \quad (18.7)$$

$$\mathbf{x}_2^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_o^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{x}_2^{\text{topo}} \quad (18.8)$$

$$\mathbf{x}_3^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_o^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{x}_3^{\text{topo}} \quad (18.9)$$

$$\mathbf{x}_4^{\text{WGS84}} = \mathbf{x}_o^{\text{WGS84}} + \mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} \cdot \mathbf{x}_4^{\text{topo}} \quad (18.10)$$

Avec :

$$\mathbf{R}_{\text{topo}}^{\text{WGS84}} = \mathbf{R}_{\text{WGS84}}^{\text{topo} T} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (18.11)$$

On peut également calculer des angles pour que la plateforme suive la trajectoire de façon tangentielle. Ainsi, pour chaque époque, on calcule les coordonnées du topocentre en WGS84 ainsi que les coordonnées cartésiennes WGS84 du point consécutif sur la spline d'interpolation de la trajectoire. On calcule alors les coordonnées topocentriques de deux points très proches sur la trajectoire. Le vecteur entre ces deux points donne la direction de la plateforme ce qui correspond à l'axe $\mathbf{e}_y^{\text{body}}$.

$$\mathbf{e}_y^{\text{body}} = \frac{\mathbf{x}_i^{\text{topo}} - \mathbf{x}_o^{\text{topo}}}{|\mathbf{x}_i^{\text{topo}} - \mathbf{x}_o^{\text{topo}}|} = \frac{\mathbf{x}_i^{\text{topo}}}{|\mathbf{x}_i^{\text{topo}}|} \quad (18.12)$$

$$\mathbf{e}_x^{\text{body}} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}}}{|\mathbf{n} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}}|} \quad (18.13)$$

$$\mathbf{e}_z^{\text{body}} = \mathbf{e}_x^{\text{body}} \times \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad (18.14)$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (18.15)$$

A partir des vecteurs de base du système body exprimés dans le système topo, on peut former la matrice de rotation pour passer du système topo au système body :

$$\mathbf{R}_{\text{body}}^{\text{topo}} = (\mathbf{e}_x^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}}) \quad (18.16)$$

La figure 14 représente la trajectoire simulée, avec la plateforme qui suit la trajectoire de manière tangentielle. Pour chaque récepteur, les coordonnées WGS84 de chaque récepteur sont enregistrées dans un dictionnaire et seront utilisées pour la génération des fichiers d'observations RINEX.

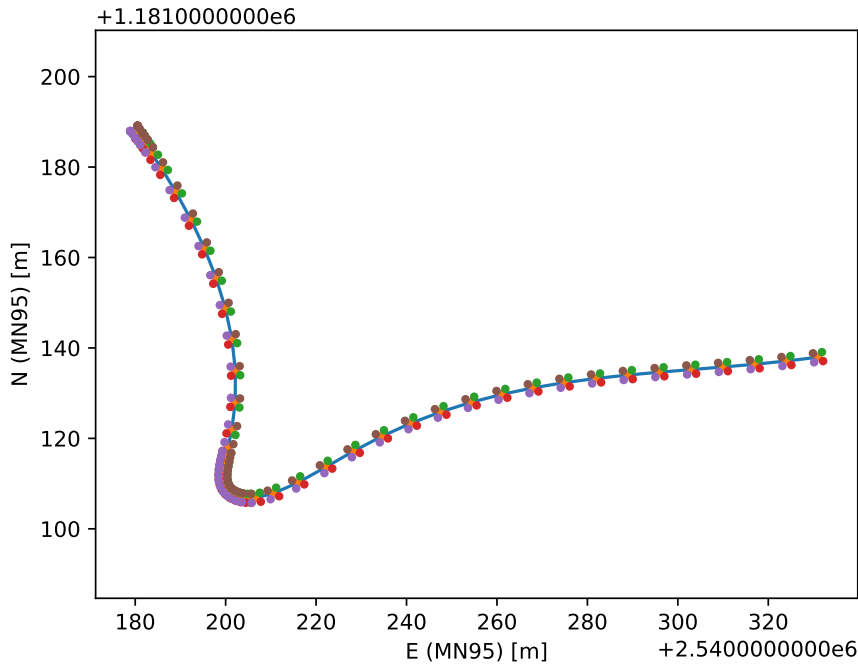


FIGURE 14 – Trajectoire simulée (angles tangents à la trajectoire)

18.2 Simulation d'observations GNSS au format RINEX

A partir de la position des antennes calculées en coordonnées cartésiennes WGS84, des observations de pseudo-distance, de phase et de Doppler ont été générées, en utilisant les éphémérides GPS du 24.06.2020. Pour vérifier l'intégrité des fichiers RINEX générés par le simulateur, une solution sur le code a été calculée avec un script de positionnement ainsi qu'avec le logiciel RTKLIB.

18.2.1 Positionnement sur le code et comparaison avec RTKLIB

Un calcul a été réalisé pour vérifier, dans le cas d'une simulation parfaite sans bruit, si les coordonnées en sortie sont les mêmes que celles utilisées pour générer la simulation. Le point utilisé pour ce test est le premier point de la trajectoire.

x_A^{WGS84}	y_A^{WGS84}	z_A^{WGS84}	cdt_r
4346430.1520	507153.2472	4625315.2502	0.000

Les observations de pseudo-distances sur le code utilisées pour ce calcul sont les suivantes :

PRN	Signal	Observation [m]	Ecart-type [m]	v [m]
G01	C1C	22594264.820	1.000	+0.000
G08	C1C	20328961.389	1.000	+0.000
G10	C1C	21653813.652	1.000	+0.000
G11	C1C	20956746.468	1.000	+0.000
G16	C1C	24486818.632	1.000	+0.000
G20	C1C	23778893.214	1.000	+0.000
G21	C1C	23938802.666	1.000	+0.000
G22	C1C	23675844.801	1.000	+0.000
G27	C1C	21029943.035	1.000	+0.000
G32	C1C	23338676.345	1.000	+0.000

Calcul	x_A^{WGS84}	$\sigma_{x_A^{\text{WGS84}}}$	y_A^{WGS84}	$\sigma_{y_A^{\text{WGS84}}}$	z_A^{WGS84}	$\sigma_{z_A^{\text{WGS84}}}$	cdt_r	σ_{cdt_r}
Script	4346430.1520	0.022	507153.2471	0.011	4625315.2502	0.017	0.000	0.016
RTKLIB	4346443.8990	3.5621	507156.4391	1.8933	4625318.2785	3.0058	-	-
Différence	+13.7470	-	+3.192	-	+3.0283	-	-	-

On constate que l'on retrouve effectivement les mêmes coordonnées que celles utilisées pour la simulation du fichier RINEX, avec un écart-type de l'ordre de 2 cm. De plus, tous les résidus sont nuls. Cependant, en effectuant le même calcul avec RTKLIB, on remarque que les coordonnées calculées ne sont pas les mêmes. Cela signifie que RTKLIB n'utilise pas exactement les mêmes algorithmes pour le calcul de positionnement simple sur le code.

Un deuxième test a été effectué en réalisant un calcul différentiel sur le code. Pour cela, le point de base suivant a été utilisé :

x_B^{WGS84}	y_B^{WGS84}	z_B^{WGS84}
4346430.4888	507154.4743	4625315.8663

Les observations de double-différences sont les suivantes :

PRN1	PRN2	Signal	Observation [m]	Ecart-type [m]	v [m]
G01	G08	C1C	1.250	1.000	-0.000
G01	G10	C1C	1.923	1.000	+0.001
G01	G11	C1C	0.622	1.000	-0.001
G01	G16	C1C	0.666	1.000	+0.000
G01	G20	C1C	1.783	1.000	-0.000
G01	G21	C1C	2.037	1.000	+0.000
G01	G22	C1C	0.260	1.000	-0.001
G01	G27	C1C	1.706	1.000	-0.000
G01	G32	C1C	1.888	1.000	+0.000

On peut alors comparer les résultats d'un calcul différentiel sur le code :

Calcul	x_A^{WGS84}	$\sigma_{x_A^{\text{WGS84}}}$	y_A^{WGS84}	$\sigma_{y_A^{\text{WGS84}}}$	z_A^{WGS84}	$\sigma_{z_A^{\text{WGS84}}}$
Script	4346430.1518	0.023	507153.2469	0.006	4625315.2501	0.020
RTKLIB	4346430.1775	0.7721	507153.2522	0.3799	4625315.2666	0.6494
Différence	+0.0257	-	+0.0053	-	+0.0165	-

Si l'on effectue un calcul différentiel, on voit que l'écart se réduit considérablement entre les résultats des deux programmes de calcul, ce qui s'explique par l'annulation des erreurs atmosphériques lors de l'utilisation d'observations de double-différences. Par un calcul différentiel, on obtient alors des écarts de l'ordre de 2.5 cm au maximum.

Ce test et cette comparaison avec RTKLIB permettent de valider la simulation du fichier RINEX.

18.3 Validation du calcul d'attitude

Pour tester les algorithmes de calcul d'attitude, des fichiers RINEX d'observations ont été générés pour chaque récepteur à partir de la trajectoire simulée par le simulateur, selon les paramètres angulaires définis par l'utilisateur. Les simulations suivantes ont été réalisées :

1. Simulation d'observations parfaites, avec une rotation nulle autour de chaque axe. Cela signifie que le repère body est confondu avec le repère topo.
2. Simulation d'observations avec du bruit de mesure, avec une rotation nulle autour de chaque axe
3. Simulation d'observations avec du bruit de mesure, avec les rotations suivantes : $y_{\text{body}}^{\text{topo}} = 50^\circ$, $p_{\text{body}}^{\text{topo}} = 10^\circ$, $r_{\text{body}}^{\text{topo}} = 5^\circ$
4. Simulation d'observations avec du bruit de mesure, avec une orientation tangente à la trajectoire
5. Simulation d'observations avec du bruit de mesure et des sauts de cycle, avec une orientation tangente à la trajectoire

Pour analyser les résultats du calcul d'attitude, plusieurs indicateurs peuvent être étudiés :

- **Nombre d'itérations** du calcul
Cet indicateur permet de vérifier si le calcul a bien convergé.
- Analyse de l'écart-type a priori σ_0 et a posteriori s_0 au moyen du **quotient d'erreur moyenne**
Par cet indicateur on peut vérifier le modèle stochastique des observations et déterminer s'il est réaliste ou s'il est trop optimiste ou trop pessimiste par rapport à la précision réelle des observations. En d'autres mots, on vérifie si la précision calculée des observations en entrée est similaire à la précision des observations en entrée.
- Analyse des **résidus** sur les observations
Les résidus sur les observations de double-différences devraient correspondre au bruit de mesure.
- Analyse des **écarts-type** des angles estimés
Cet indicateur permet de quantifier la précision des angles d'attitude déterminés par le calcul. Le détail de chaque écart-type de chaque angle est disponible dans les listings de calcul. Dans le rapport, pour une question de lisibilité, seule la moyenne des écarts-type est présentée ainsi que la précision de cette moyenne.
- Analyse de l'indicateur de la **recherche d'ambiguïtés**
Par cette analyse on peut déterminer la qualité de la résolution des ambiguïtés déterminées par l'algorithme LAMBDA. Si les ambiguïtés sont correctement fixées, cet indicateur vaut 1.

18.3.1 Angle de 0° autour de chaque axe

Le cas le plus simple pour tester les algorithmes de calcul de l'attitude de la plateforme est d'utiliser des mesures parfaites simulées sans bruit et sans saut de cycle. Cela permet de vérifier le modèle mathématique implémenté dans le programme.

Une simulation a été réalisée en partant du principe que la plateforme garde toujours la même orientation tout au long de la trajectoire. A partir d'une simulation sans bruit, avec des angles de 0° autour de chaque axe, on peut vérifier si les valeurs estimées correspondent aux valeurs initiales. Si tous les angles d'attitude valent 0°, la matrice de rotation entre le système body et le système topo devient une matrice unitaire et les deux systèmes sont confondus. Le tableau 10 présente les principales caractéristiques du calcul.

TABLE 10: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Etat plateforme	Statique et en mouvement
Date	24.06.2020
Début	UTC 14h 29min 24sec
Fin	UTC 14h 30min 15sec
Nb époques	51
Position approchée	Positionnement absolu sur le code
Bruit	Pas de bruit
Sauts de cycles	Pas de sauts de cycle
Quaternions approchés	Helmert 3D
Estimation flottante	Quaternions libérés, ambiguïtés libérées
Estimation fixe	Quaternions libérés, ambiguïtés fixées

Durant les premières époques d'observation, la plateforme est statique puisqu'elle est à l'arrêt. Dans les époques suivantes, elle se déplace le long de la trajectoire simulée.

Comme il s'agit de mesures parfaites, on pourrait utiliser n'importe quelle stratégie pour calculer les composantes des quaternions approchés (Helmert 3D, repère parallèle à la trajectoire, repère formé par deux antennes parallèles à l'axe y de la plateforme, ou valeurs initiales saisies manuellement). Toutefois, le choix a été fait d'estimer les quaternions approchés à l'aide d'un calcul de Helmert 3D.

Le tableau 11 présente les principaux résultats du calcul. On peut notamment voir que le quotient d'erreur moyenne est très faible. En effet, comme les observations sont parfaites, l'écart-type est nul. Le nombre d'itérations est très faible, puisque le calcul converge directement sur les bonnes valeurs.

TABLE 11: Résultats du calcul

Paramètre	Valeur
Nb itérations (ambiguïtés flottantes)	3
Ratio LAMBDA	1
Nb itérations (ambiguïtés fixées)	1
Nb observations	1824
Nb inconnues	240
Nb conditions	87
Surabondance	1671
σ_0 [m]	0.004
s_0 [m]	0.00011
Quotient d'erreur moyenne	0.03
σ_{yaw} [°]	0.001 ± 0.0000
σ_{pitch} [°]	0.004 ± 0.0000
σ_{roll} [°]	0.004 ± 0.0000

Les précisions des angles estimés sont quasiment nuls, ce qui est logique puisqu'il n'y a pas de bruit dans les observations. Les figures 15, 16 et 17 présentent les angles d'attitude de la plateforme (y_{body}^{topo} , p_{body}^{topo} et r_{body}^{topo}) autour des axes z, y et x de la plateforme et les valeurs des angles approchés utilisés pour le calcul des quaternions approchés. Comme on peut le constater, ces angles sont très proches de la valeur vraie (donc de 0°).

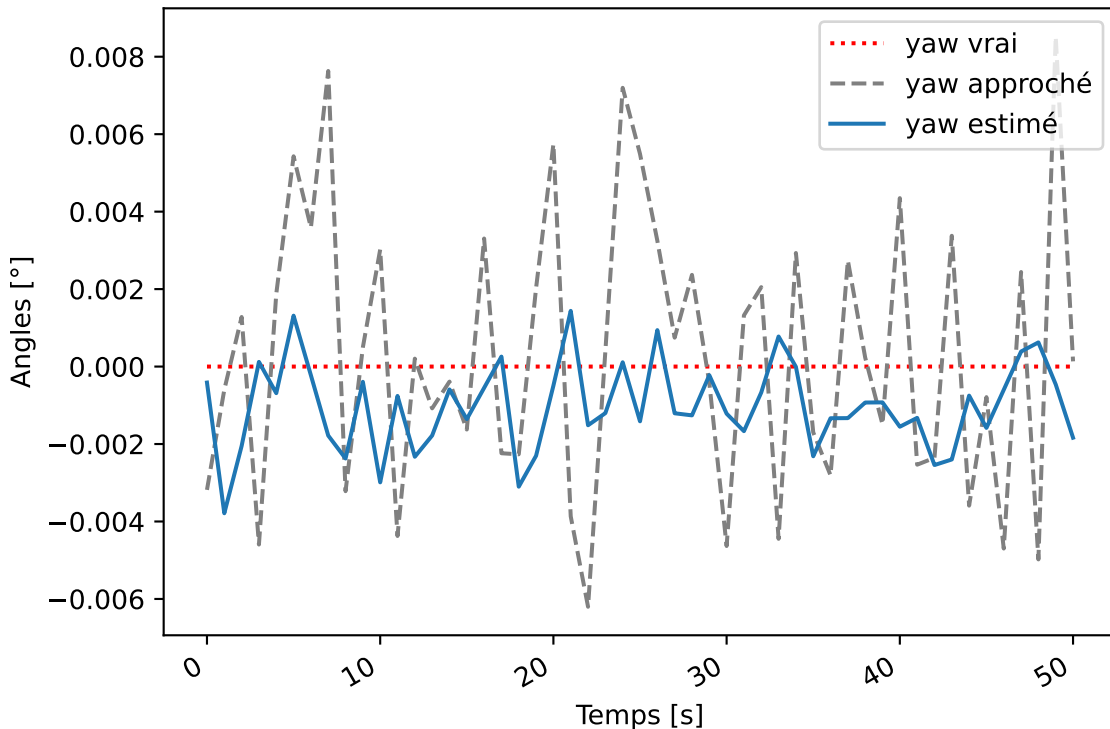


FIGURE 15 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

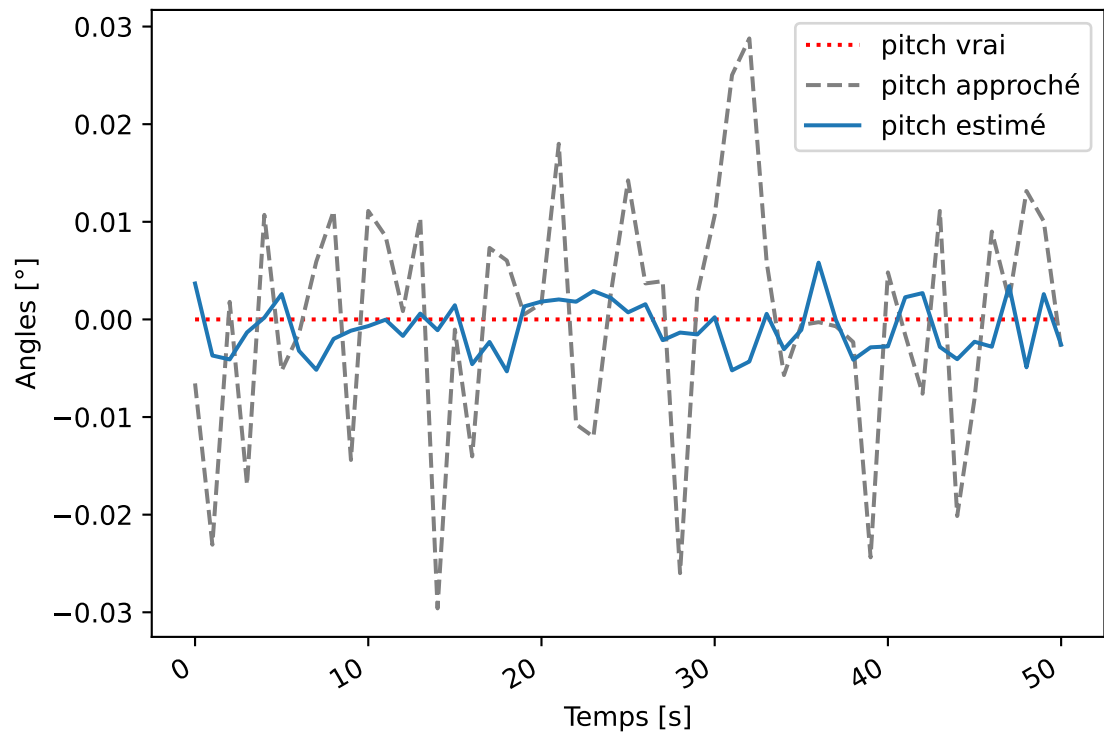


FIGURE 16 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

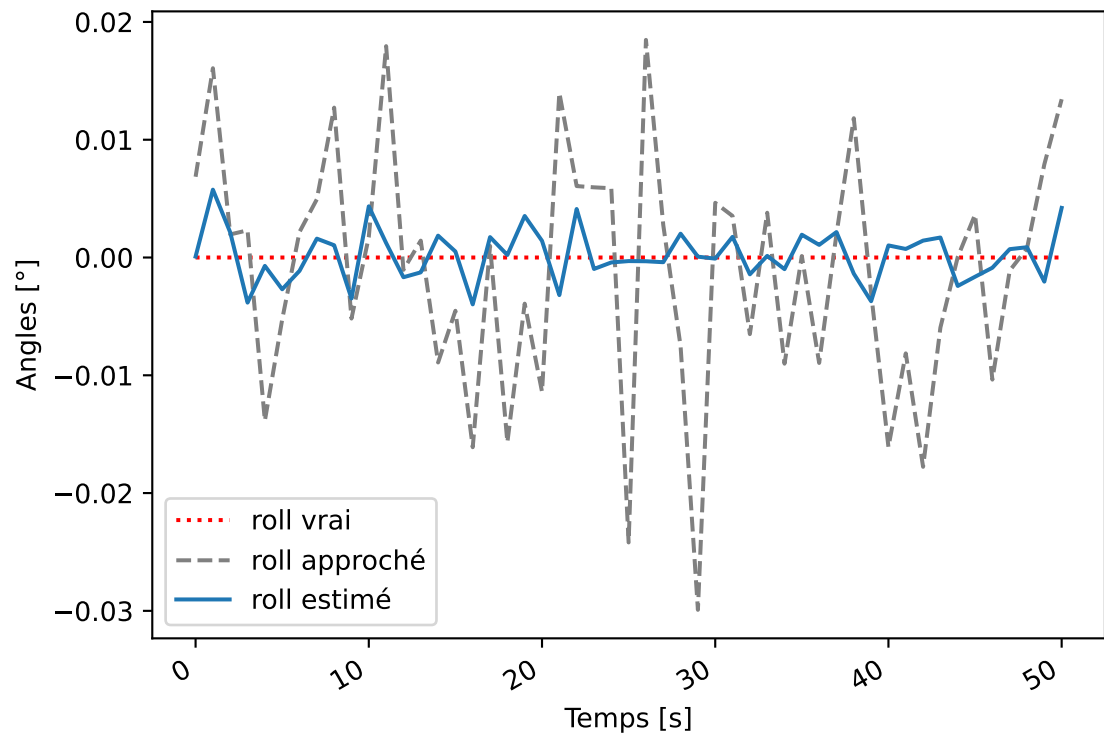


FIGURE 17 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

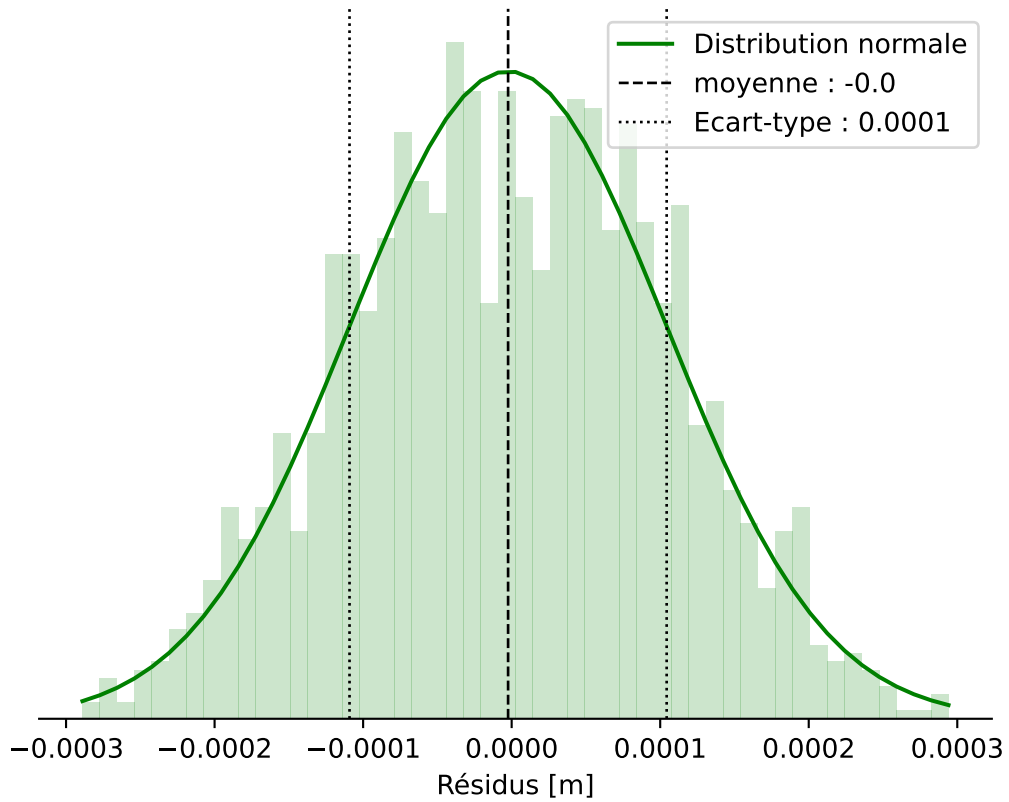


FIGURE 18 – Résidus

Comme le montre la figure 18, les résidus sont quasiment nuls, ce qui s'explique par l'utilisation d'observations parfaites. Ce premier test a permis de démontrer que l'on retrouve effectivement les valeurs définies en entrée et que le calcul s'exécute correctement.

18.3.2 Angle de 0° autour de chaque axe, avec du bruit

Pour ce deuxième test, des observations ont été générées de la même manière que dans le test précédent, mais en ajoutant du bruit sur les observations de pseudo-distances sur le code et les observations de phase. Par propagation d'erreur, on sait que le bruit sur une observation de double-différence correspond au double du bruit sur une observation de zéro-différence. Ainsi, si le bruit sur une observation de zéro-différence est de 0.002 m, il sera de 0.004 m sur les observations de double-différences.

Observation	Bruit [m]
Code (pseudo-distance)	1.0
Phase (zéro-différence)	0.002
Phase (double-différence)	0.004

Le tableau 12 résume les paramètres du calcul.

TABLE 12: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Etat plateforme	Statique et en mouvement
Date	24.06.2020
Début	UTC 14h 29min 24sec
Fin	UTC 14h 30min 15sec
Nb époques	51
Position approchée	Positionnement absolu sur le code
Bruit	Oui (1m sur le code, 0.002 m sur la phase)
Sauts de cycles	Pas de sauts de cycle
Quaternions approchés	Angles approchés (0.1°,0.1°,0.1°)
Estimation flottante	Quaternions fixés, ambiguïtés libérées
Estimation fixe	Quaternions libérés, ambiguïtés fixées

En ajoutant du bruit, les angles approchés calculés par Helmert 3D sont trop éloignés des valeurs vraies et ne permettent pas au calcul de converger. Les ambiguïtés ne sont pas fixées sur les bonnes valeurs, ce qui implique une détermination fautive des angles estimés. Ainsi, pour permettre au calcul de converger, les angles approchés ont été calculés à l'aide d'un repère parallèle formé d'une ligne de base parallèle à l'axe y de la plateforme, en utilisant les coordonnées approchées des récepteurs 1 et 2. Cette solution ne permet pas non plus au calcul de converger.

La dernière solution utilisée est de saisir des angles approchés. Toutefois des angles approchés de 0° risquent de provoquer une division par 0. Les angles approchés ont donc été introduits à 0.1°. Malgré cela, le calcul n'arrive pas à converger si toutes les inconnues sont libérées dans le calcul. Pour que le calcul converge, les quaternions ont dus être fixés dans le calcul des ambiguïtés flottantes, puis ont été libérés dans le calcul avec les ambiguïtés fixées. On voit que les ambiguïtés sont correctement estimées, puis que le ratio LAMBDA vaut 1.

Comme les quaternions sont très proches de la réalité, le calcul devrait pourtant converger même sans fixer les quaternions dans le calcul des ambiguïtés flottantes. Ce problème ne s'explique pas et il pourrait être lié au fait que les angles initiaux sont de 0°.

Le tableau 13 donne un aperçu des principaux résultats du calcul. On peut constater que malgré l'ajout de bruit, le calcul converge très rapidement (2 itérations). Cela s'explique par le fait que les quaternions ont été fixés lors du calcul des ambiguïtés flottantes.

La précision angulaire obtenue par ce calcul est de 0.030° pour les angles $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et d'environ 0.145° pour les angles $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$. Les angles autour des axes x et y sont moins bien définis, car le GNSS est environ 3 à 5 fois moins précis en altimétrie qu'en planimétrie. On peut également remarque que le quotient d'erreur moyenne est proche de 1 puisque l'écart-type de l'unité de poids a posteriori correspond à l'écart-type a priori. Le modèle stochastique est donc réaliste, ce qui est normal puisque l'on a défini soi-même le bruit dans la simulation.

TABLE 13: Résultats du calcul

Paramètre	Valeur
Nb itérations (ambiguïtés flottantes)	2
Ratio LAMBDA	1
Nb itérations (ambiguïtés fixées)	2
Nb observations	1824
Nb inconnues	240
Nb conditions	87
Surabondance	1671
σ_0 [m]	0.004
s_0 [m]	0.0041
Quotient d'erreur moyenne	1.03
σ_{yaw} [°]	0.030 ± 0.00042
σ_{pitch} [°]	0.144 ± 0.00143
σ_{roll} [°]	0.145 ± 0.00188

Les figures 19, 20 et 21 montrent les résultats angulaires obtenus avec ce calcul. On voit que les angles autour des trois axes correspondent aux angles simulés et sont ainsi proches de 0°.

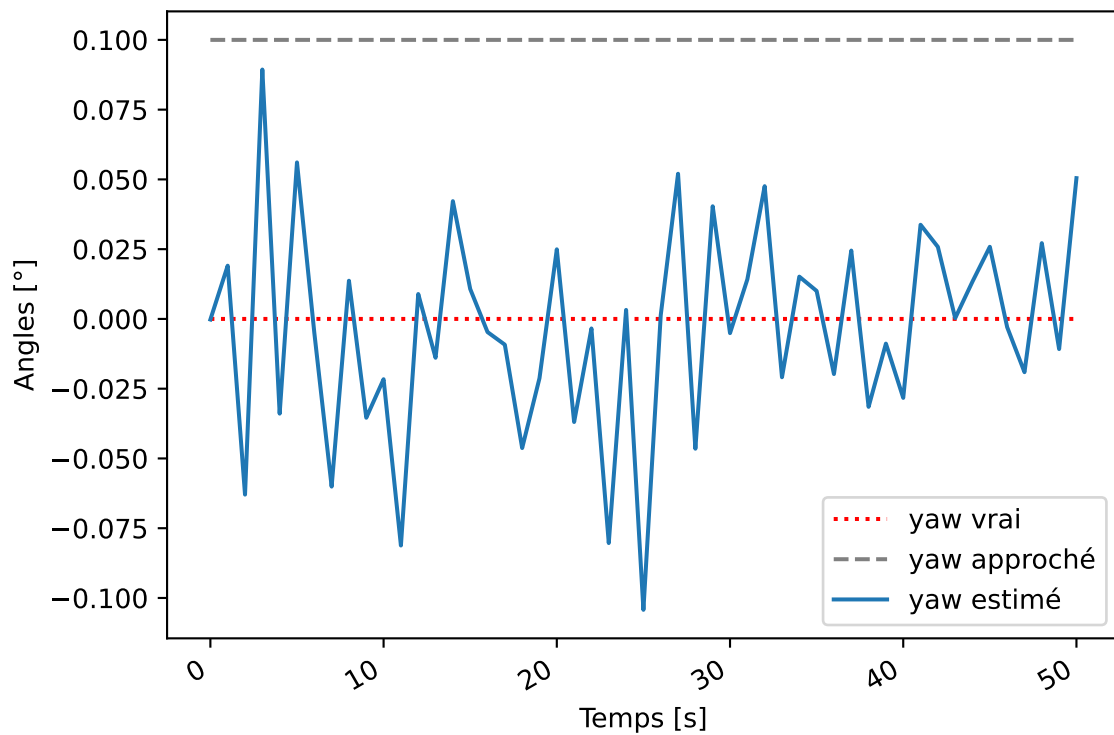


FIGURE 19 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

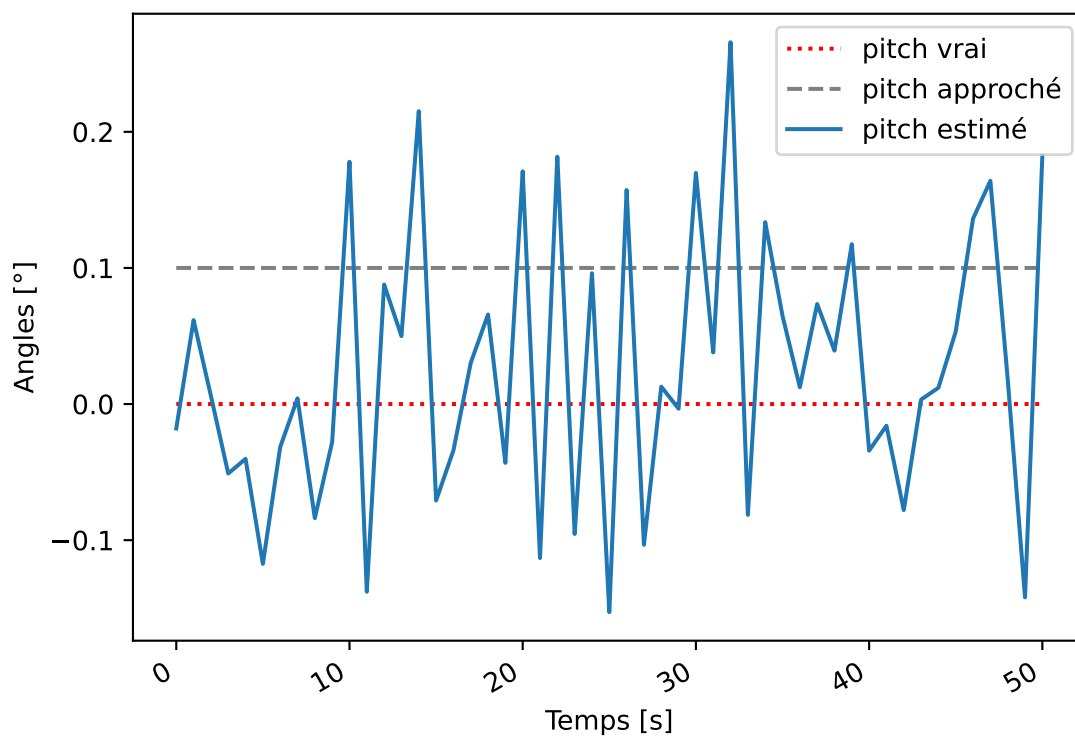


FIGURE 20 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

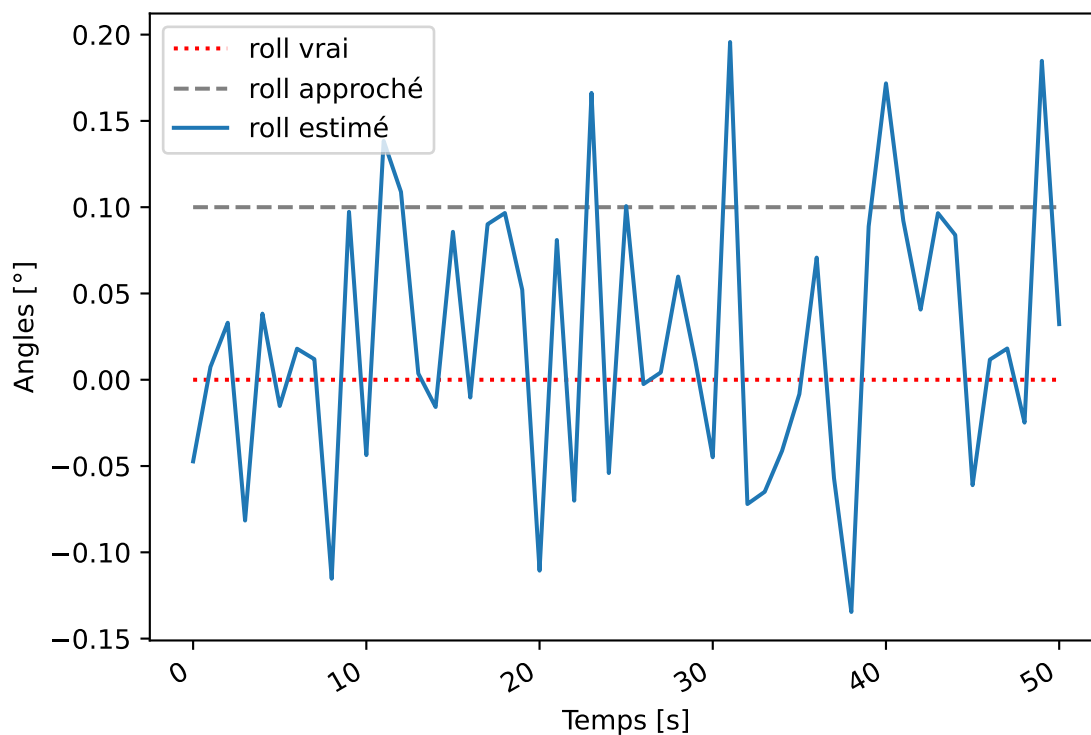


FIGURE 21 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

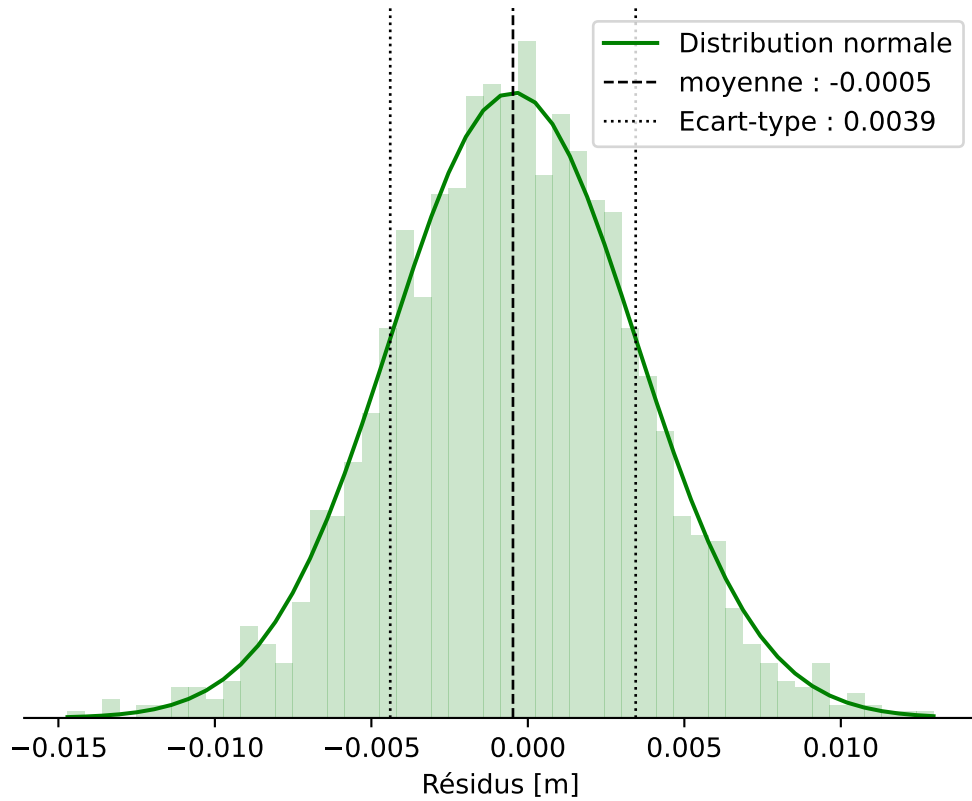


FIGURE 22 – Résidus

En analysant la figure 18, on remarque que les résidus sont de l'ordre de 4 mm, ce qui correspond au bruit de mesure sur une observation de double-différence. De plus, les résidus suivent une distribution normale, selon une courbe de Gauss.

18.3.3 Angles constants $\gamma=50^\circ$, $\rho=10^\circ$, $r=5^\circ$, avec bruit

Pour vérifier les algorithmes de calcul de l'attitude et comprendre si le problème de la méthode des détermination des quaternions approchés du cas précédent est général ou non, il est intéressant de simuler des observations avec des angles non-nuls autour des trois axes. Les composantes des quaternions approchés sont ainsi calculées par un calcul de Helmert 3D à partir des positions absolues sur le code des antennes de la plateforme. Il est important de relever que le bruit de mesure est généré de façon absolument aléatoire et il n'y a pas de corrélation entre les observations des différents récepteurs. Ainsi, si l'observation de pseudo-distance simulée entre le satellite i et le récepteur 1 est entachée d'une erreur de 1 m, cela ne signifie pas nécessairement que l'observation entre ce satellite et les autres récepteurs soit entachée de la même erreur.

Le tableau 14 donne un aperçu des paramètres de calcul.

TABLE 14: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Etat plateforme	Statique et en mouvement
Date	24.06.2020
Début	UTC 14h 29min 24sec
Fin	UTC 14h 30min 15sec
Nb époques	51
Position approchée	Positionnement absolu sur le code
Bruit	Oui (1m sur le code, 0.002 m sur la phase)
Sauts de cycles	Pas de sauts de cycle
Quaternions approchés	Helmert 3D
Estimation flottante	Quaternions libérés, ambiguïtés libérées

TABLE 14: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Estimation fixe	Quaternions libérés, ambiguïtés fixées

Le tableau 15 donne un aperçu des principaux résultats du calcul. Puisque les quaternions approchés ne sont pas très précis, le premier calcul nécessite 27 itérations pour converger, puis 6 itérations avec les ambiguïtés fixées. Toutefois, toutes les inconnues ont pu être estimées dans l'estimation avec les ambiguïtés flottantes, sans devoir fixer les quaternions approchés comme dans le test précédent.

On remarque que le quotient d'erreur moyenne est proche de 1, ce qui signifie que le modèle stochastique est réaliste.

La précision angulaire obtenue par l'estimation avec les ambiguïtés fixées est similaire à la précision obtenue avec le test précédent.

TABLE 15: Résultats calcul

Paramètre	Valeur
Nb itérations (ambiguïtés flottantes)	27
Ratio LAMBDA	1
Nb itérations (ambiguïtés fixées)	6
Nb observations	1824
Nb inconnues	240
Nb conditions	87
Surabondance	1671
σ_0 [m]	0.004
s_0 [m]	0.0042
Quotient d'erreur moyenne	1.04
σ_{yaw} [°]	0.036 ± 0.00515
σ_{pitch} [°]	0.121 ± 0.00244
σ_{roll} [°]	0.124 ± 0.00173

Les figures 23, 25 et 27 permettent de visualiser les valeurs approchées pour chaque angle d'attitude. On voit que les angles approchés sont très bruités et ne sont pas très proches des angles estimés. C'est la raison pour laquelle le calcul a besoin de 27 itérations pour converger.

Comme les valeurs approchées sont très éloignées des valeurs estimées, les figures 24, 26 et 28 permettent de visualiser les résultats du calcul des angles d'attitude par rapport aux valeurs vraies, ce qui permet de mieux voir la variation des angles estimés. On remarque que les angles estimés sont très proches des angles vrais simulés. On peut donc affirmer que l'on retombe bien sur les angles en entrée.

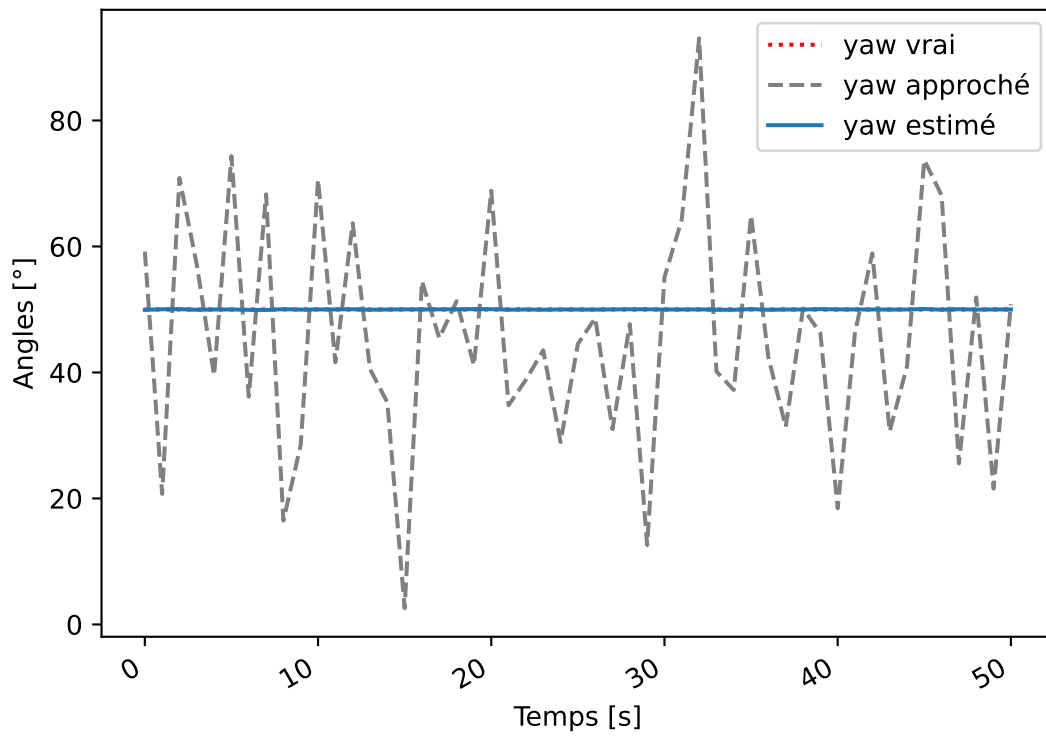


FIGURE 23 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

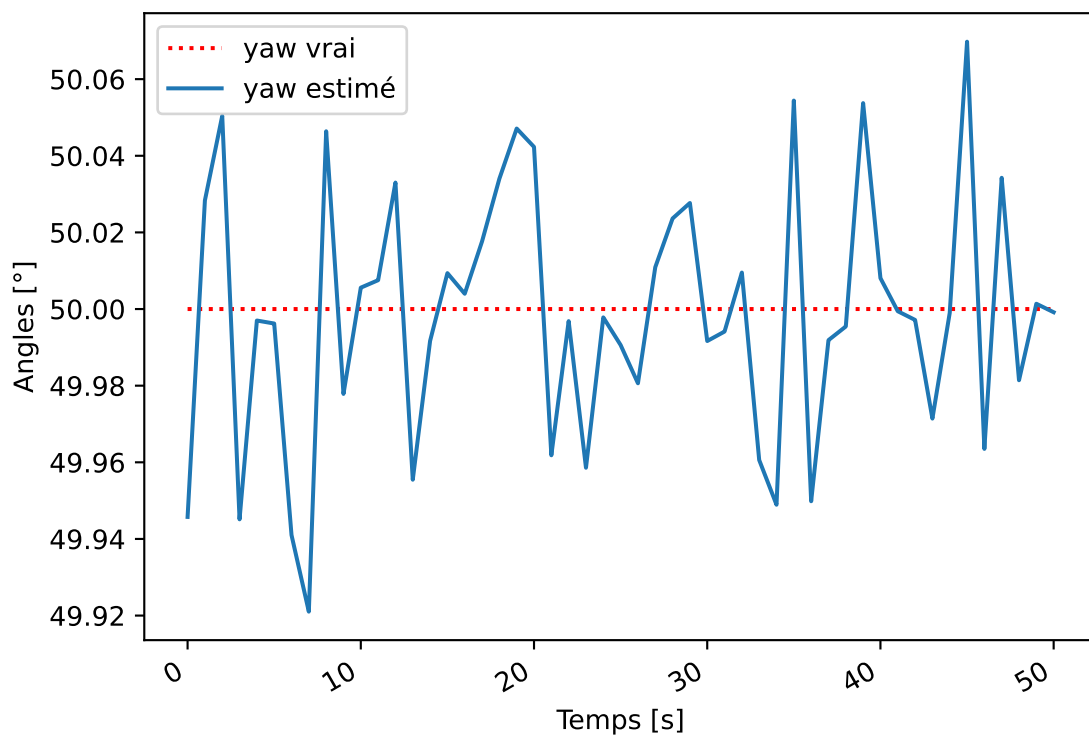


FIGURE 24 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

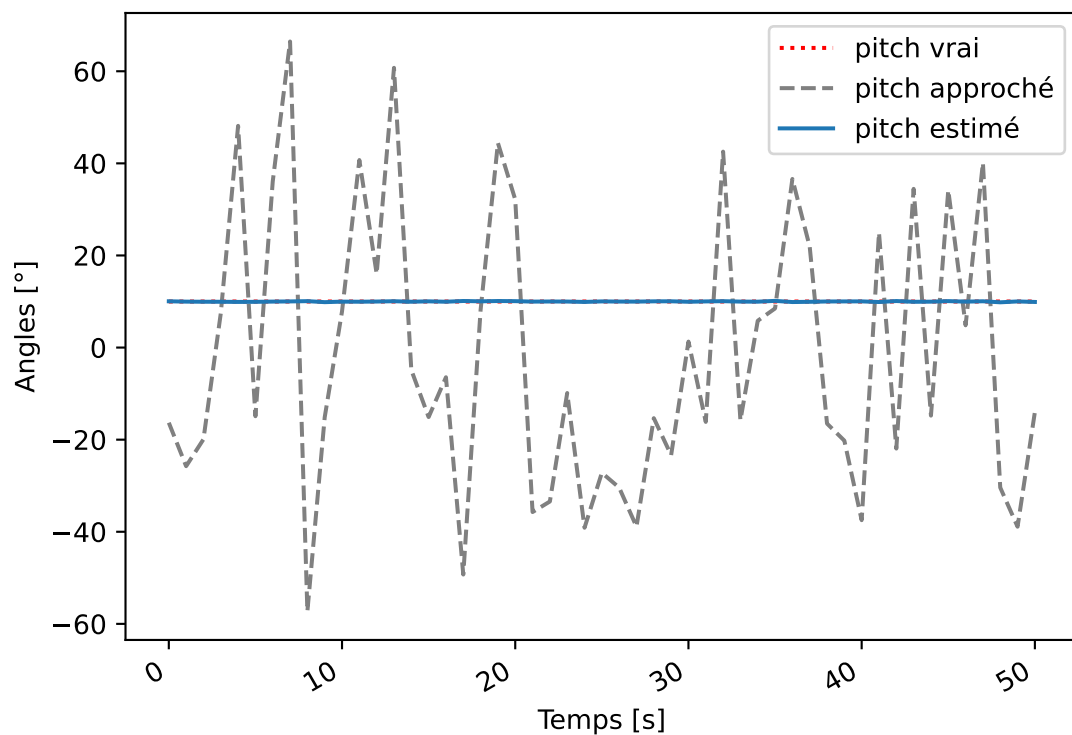


FIGURE 25 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

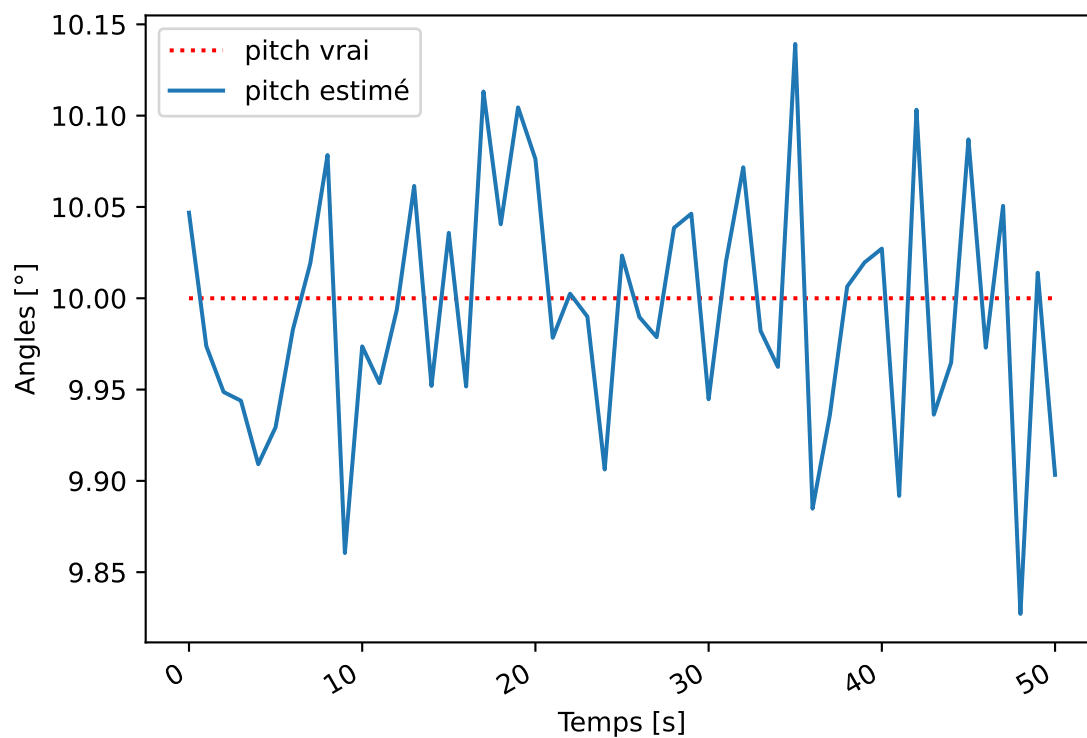


FIGURE 26 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

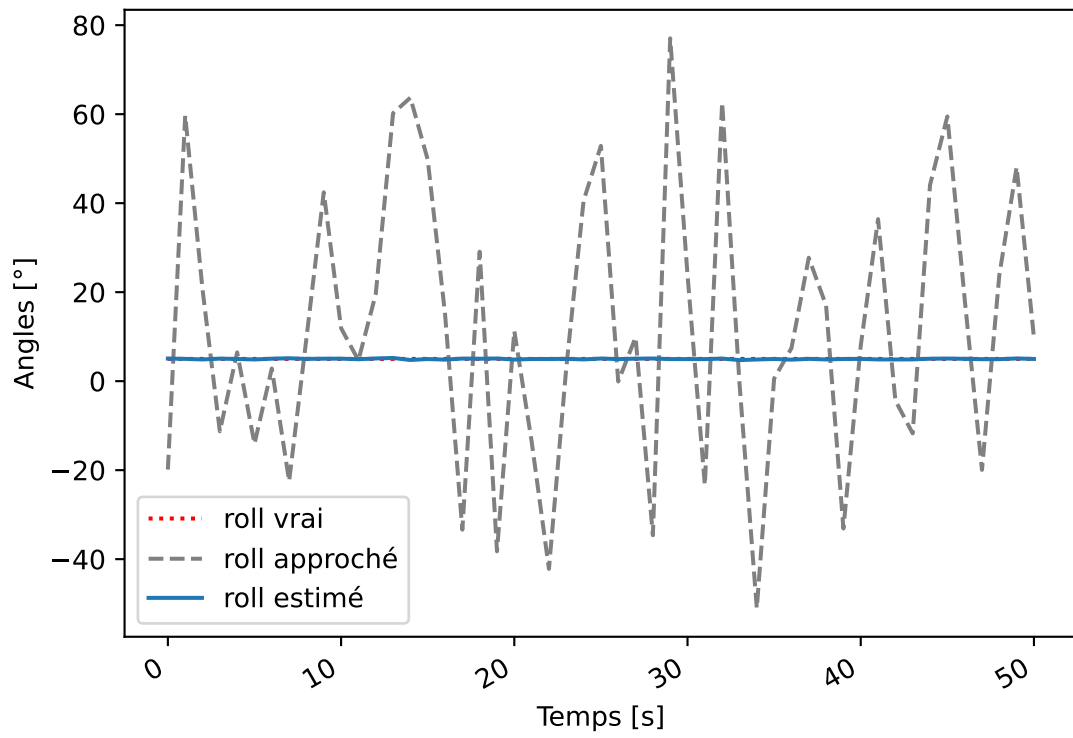


FIGURE 27 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

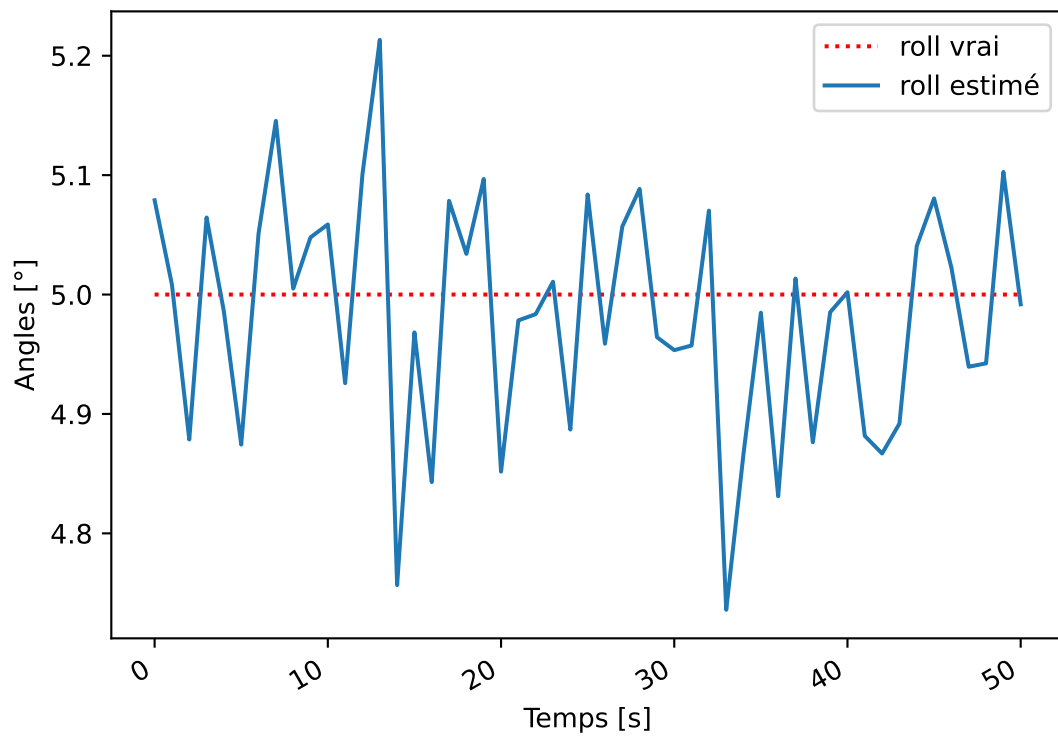


FIGURE 28 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

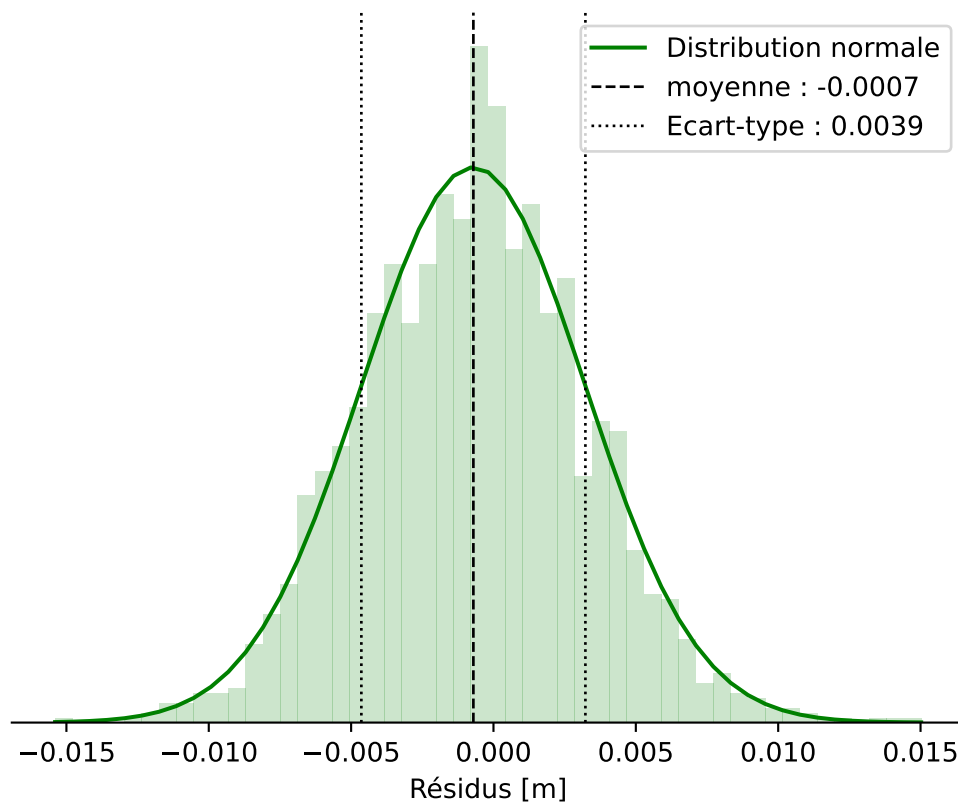


FIGURE 29 – Résidus

En analysant la figure 29, on remarque que les résidus sont de l'ordre de 4 mm, ce qui correspond au bruit de mesure sur une observation de double-différence. De plus, les résidus suivent une distribution normale, selon une courbe de Gauss, comme dans le test précédent.

18.3.4 Angles tangents, avec bruit

Pour ce test, la plateforme suit la trajectoire de façon tangentielle. Ainsi, les angles d'attitude varient tout au long du parcours. Les observations ont également été générées avec du bruit pour cette simulation. Le tableau 16 résume les principaux paramètres du calcul effectué.

TABLE 16: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Etat plateforme	Statique et en mouvement
Date	24.06.2020
Début	UTC 14h 29min 24sec
Fin	UTC 14h 30min 15sec
Nb époques	51
Position approchée	Positionnement absolu sur le code
Bruit	Oui (1m sur le code, 0.002 m sur la phase)
Sauts de cycles	Pas de sauts de cycle
Quaternions approchés	Helmert 3D
Estimation flottante	Quaternions libérés, ambiguïtés libérées
Estimation fixe	Quaternions libérés, ambiguïtés fixées

Les quaternions approchés ont été calculés via un calcul de Helmert 3D, en utilisant la position absolue sur le code de toutes les antennes.

TABLE 17: Résultats calcul

Paramètre	Valeur
Nb itérations (ambiguïtés flottantes)	10
Ratio LAMBDA	1
Nb itérations (ambiguïtés fixées)	6
Nb observations	1824
Nb inconnues	240
Nb conditions	87
Surabondance	1671
σ_0 [m]	0.004
s_0 [m]	0.0042
Quotient d'erreur moyenne	1.05
σ_{yaw} [°]	0.030 ± 0.00471
σ_{pitch} [°]	0.147 ± 0.00218
σ_{roll} [°]	0.147 ± 0.00145

Le tableau 17 présente les principaux résultats de calcul.

En s'intéressant à l'écart-type de chacun des trois angles estimés pour chaque époque, on remarque que les angles $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$ sont environ trois fois moins précis que l'angle $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$. En effet, en GNSS, l'altimétrie est environ trois fois moins bien définie que la planimétrie, ce qui explique cette différence.

On peut ainsi affirmer qu'avec un bruit de 4 mm sur une observation de double-différence, les angles peuvent être déterminés avec une précision d'environ 0.030° pour l'angle $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et d'environ 0.147° pour les angles $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$.

Les composantes des quaternions sont déterminées par un calcul de Helmert 3D basé sur un positionnement absolu sur le code pour chaque antenne, et les angles initiaux sont directement affectés par le bruit de mesure et donnent des angles approchés plus ou moins aléatoires (figures 30, 32 et 34). Dans la deuxième partie de la trajectoire, les angles approchés semblent toutefois plus proches des valeurs vraies. C'est probablement cela qui explique que le nombre d'itérations est plus faible que lors du test précédent. En effet, on voit que le calcul a

convergé après seulement 10 itérations pour le premier calcul avec les ambiguïtés flottantes. En effet, sur les figures 31, 33 et 35 on voit les résultats des angles estimés, avec l'angle $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ qui correspond aux variations de direction de la trajectoire (voir figure 14) et les angles $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$ proches de 0° .

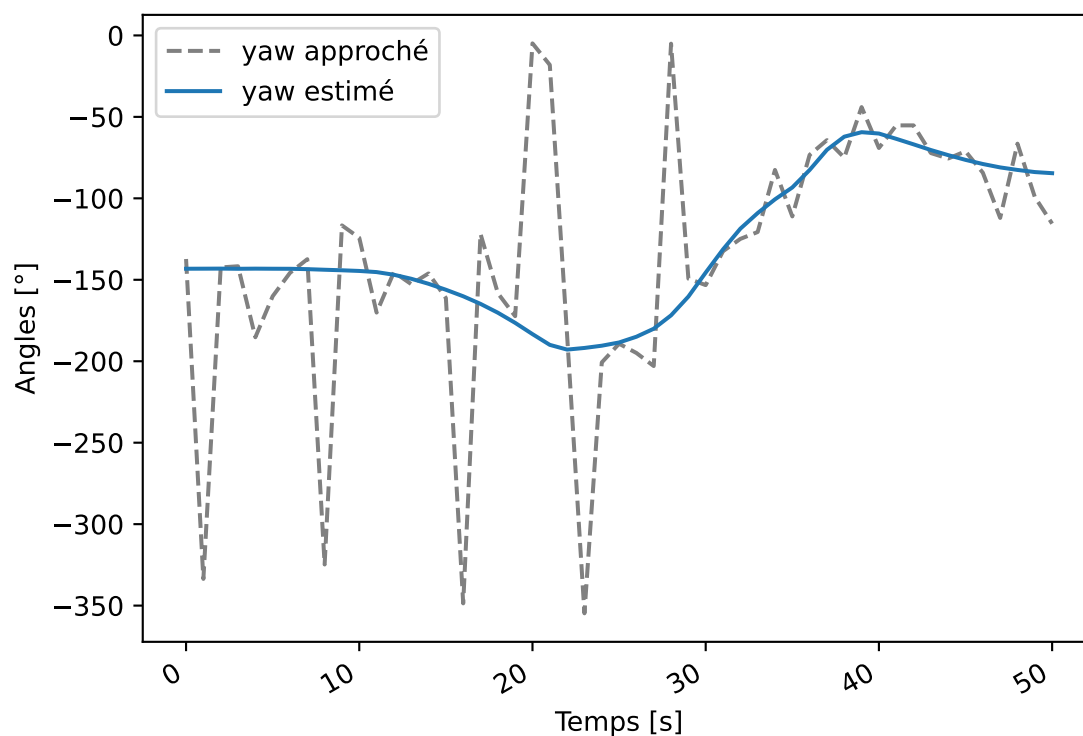


FIGURE 30 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

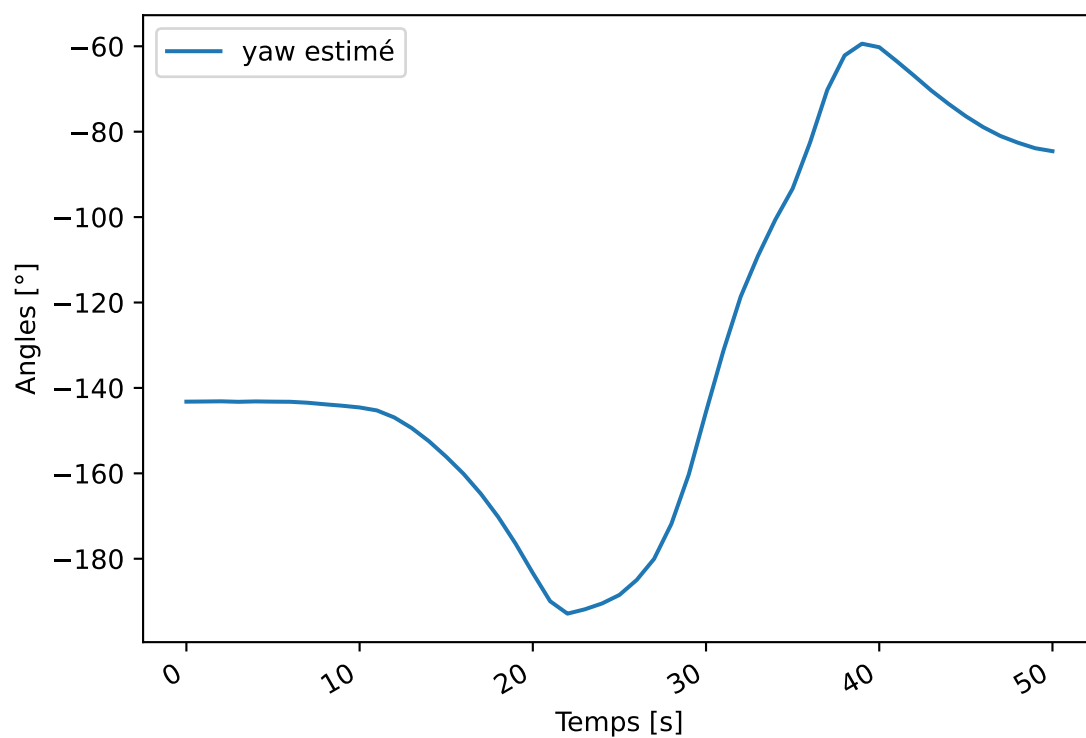


FIGURE 31 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

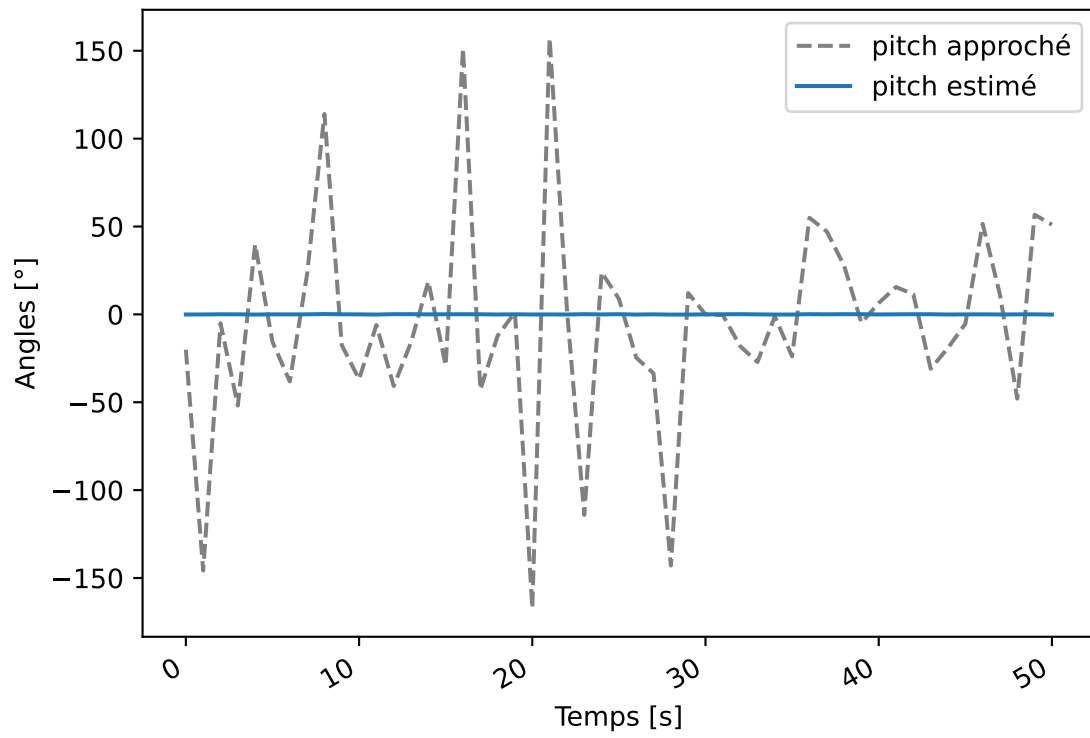


FIGURE 32 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

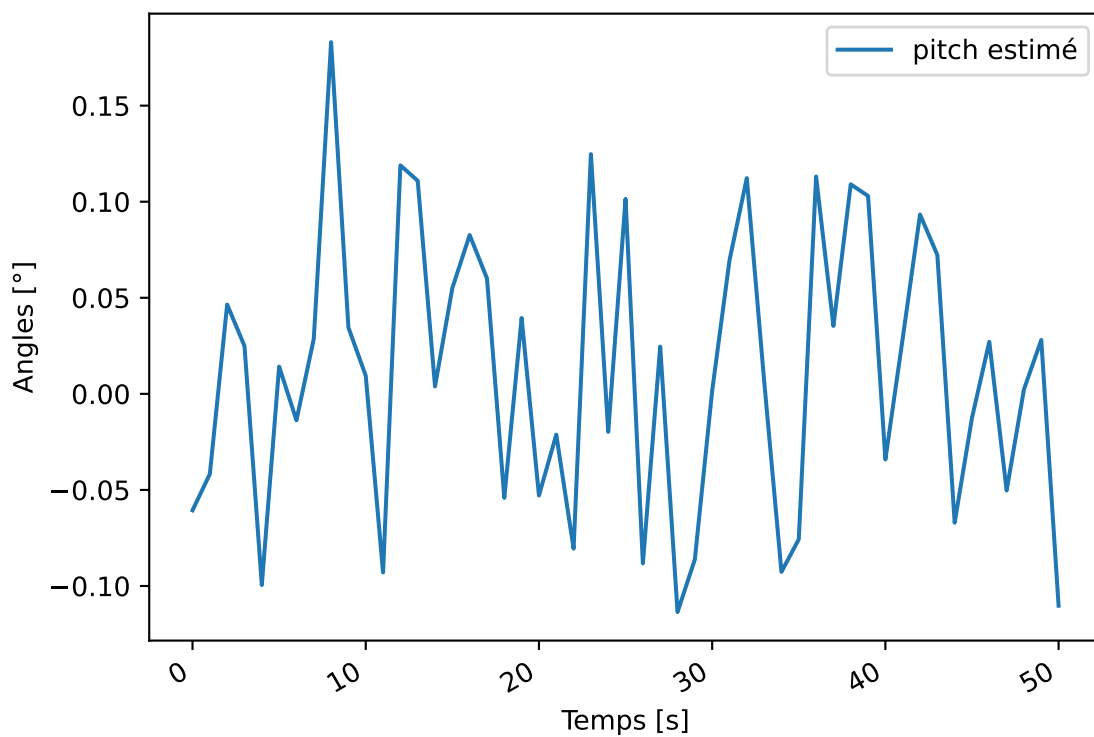


FIGURE 33 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

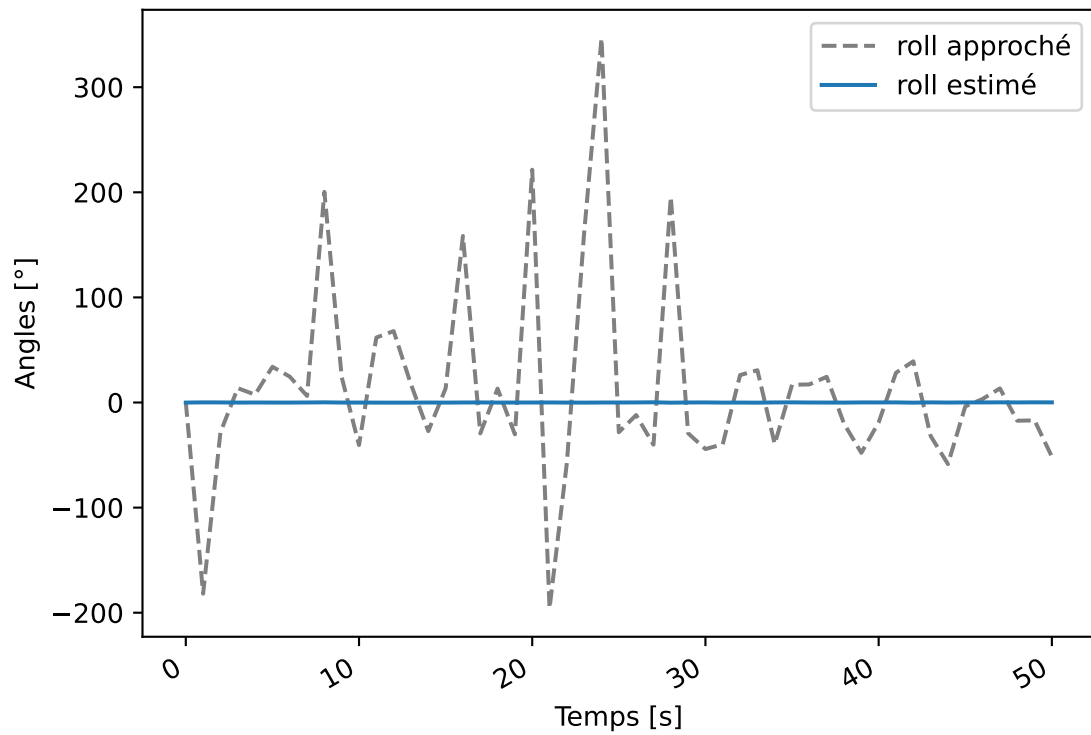


FIGURE 34 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

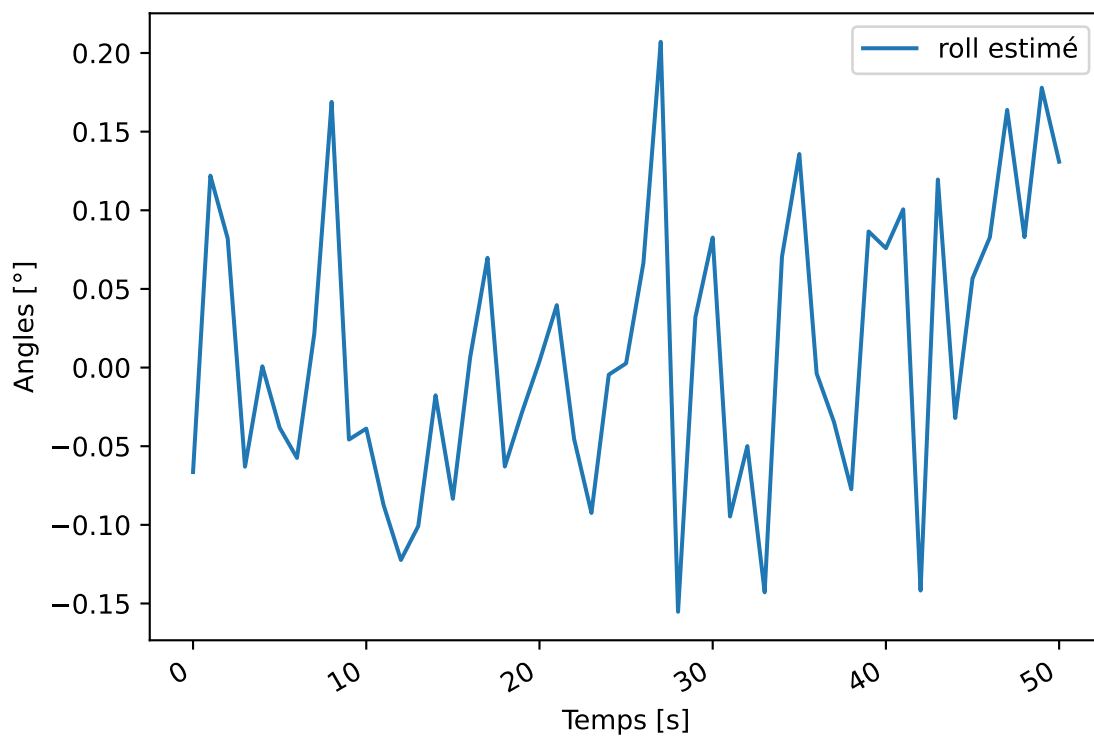


FIGURE 35 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

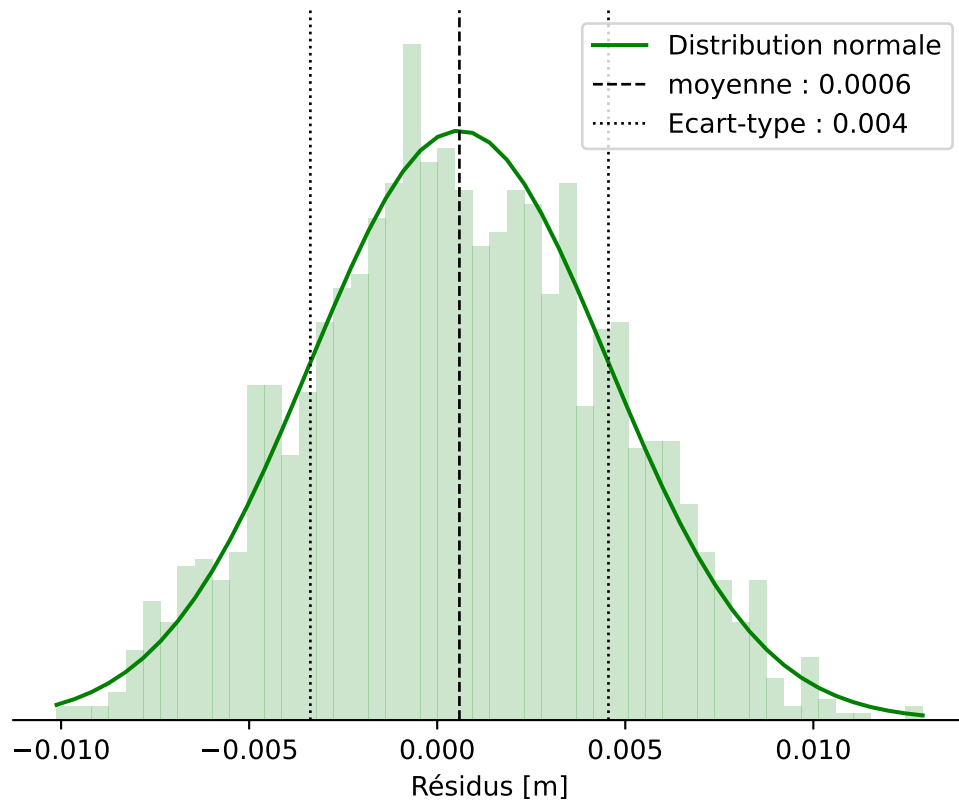


FIGURE 36 – Résidus

Comme on connaît le bruit qui a été ajouté, en analysant les résidus sur les observations, on remarque que l'écart-type des résidus correspond bien à l'écart-type des observations de double-différence (figure 36).

18.3.5 Angles tangents, avec bruit et saut de cycle

Pour vérifier la capacité du programme à détecter les sauts de cycle, les observations ont été générées avec un saut de cycle. Un saut de cycle se produit lorsque l'ambiguïté de phase change. Pour ajouter un saut de cycle dans les données simulées, il suffit de préciser le numéro du récepteur et celui du satellite ainsi que l'intervalle de temps durant lequel on souhaite avoir une autre ambiguïté de zéro-différence.

Ce test est donc similaire au test précédent, en y ajoutant simplement des sauts de cycle. Les autres paramètres restent identiques (tableau 18).

TABLE 18: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Etat plateforme	Statique et en mouvement
Date	24.06.2020
Début	UTC 14h 29min 24sec
Fin	UTC 14h 30min 15sec
Nb époques	51
Position approchée	Positionnement absolu sur le code
Bruit	Oui (1m sur le code, 0.002 m sur la phase)
Sauts de cycles	Oui
Quaternions approchés	Helmert 3D
Estimation flottante	Quaternions libérés, ambiguïtés libérées
Estimation fixe	Quaternions libérés, ambiguïtés fixées

Pour ce test, trois sauts de cycles ont été simulés. On retrouve les paramètres des sauts de cycle dans le tableau 19.

TABLE 19: Sauts de cycle simulés

N° antenne secondaire	Satellite	Satellite 2	Epoque début	Epoque fin	Ambiguïté
1	G01	G08	2020/06/24 14-29-30	2020/06/24 14-29-45	15
2	G01	G10	2020/06/24 14-29-30	2020/06/24 14-29-45	30
3	G01	G10	2020/06/24 14-29-30	2020/06/24 14-29-45	30

On peut visualiser les sauts de cycle en affichant les graphiques des triple-différences décorréliées. Les figures 37 et 39 montrent ces sauts de cycles. La figure 38 présente le résultat d'un calcul de triple-différence que l'on obtiendrait s'il n'y avait pas de saut de cycle. On y voit que les valeurs des triple-différences sont inférieures à 1 et qu'il n'y a pas de pic marqué.

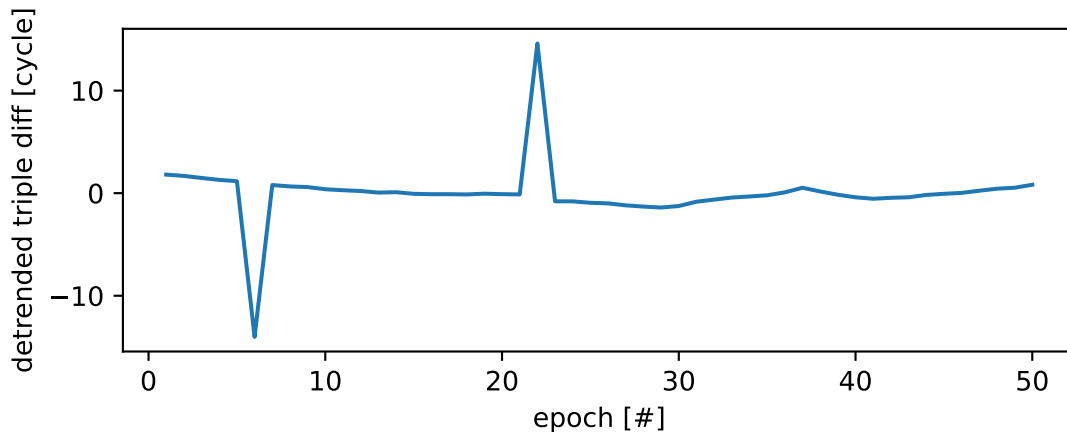


FIGURE 37 – Triple-différences avec saut de cycle (satellites G01-G08, antennes 0-1)

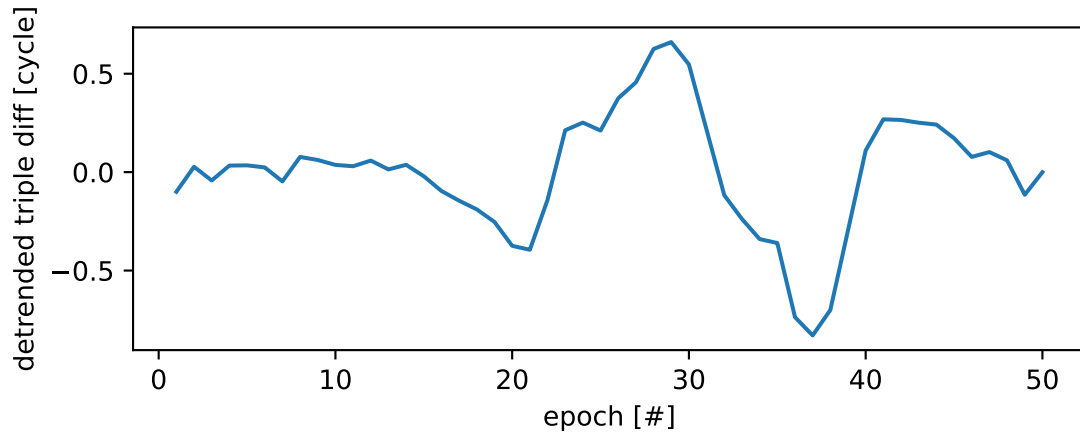


FIGURE 38 – Triple-différences sans saut de cycle (satellites G01-G08, antennes 0-1)

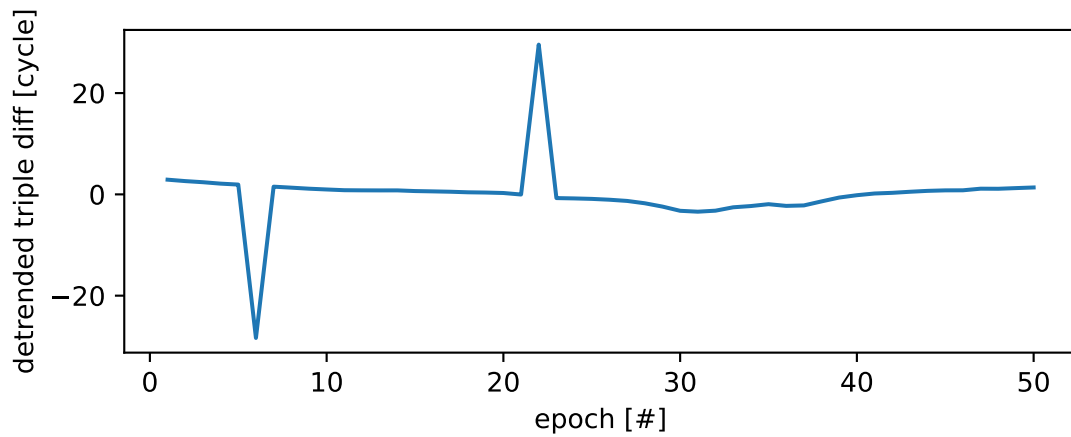


FIGURE 39 – Triple-différences avec saut de cycle (satellites G01-G10, antennes 0-2)

Le tableau 20 présente les principaux résultats de calcul.

TABLE 20: Résultats calcul

Paramètre	Valeur
Nb itérations (ambiguïtés flottantes)	13
Ratio LAMBDA	1
Nb itérations (ambiguïtés fixées)	6
Nb observations	1824
Nb inconnues	246
Nb conditions	93
Surabondance	1671
σ_0 [m]	0.004
s_0 [m]	0.0041
Quotient d'erreur moyenne	1.01
σ_{yaw} [°]	0.030 ± 0.00405
σ_{pitch} [°]	0.144 ± 0.00447
σ_{roll} [°]	0.144 ± 0.00426

Bien que la gestion des sauts de cycles peut encore être améliorée et affinée, on constate que les sauts de cycle ont bien été détectés puisque les résultats du calcul sont similaires aux résultats du test précédent. Dans le calcul, des inconnues supplémentaires ont été calculées pour chaque nouvelle ambiguïté, sans écart de mesures. Quelques itérations supplémentaires ont cependant été nécessaires pour permettre au calcul de converger. Si les sauts de cycle n'avaient pas été détectés, les résultats seraient moins bons puisqu'une seule ambiguïté aurait

été calculée, sans en estimer d'autres pour les sauts de cycle, ce qui aurait eu pour conséquence de fausser la détermination des angles d'attitude.

Les résultats des angles estimés sont similaires aux résultats du calcul sans saut de cycle (figures 40, 41, 42, 43, 44 et 45).

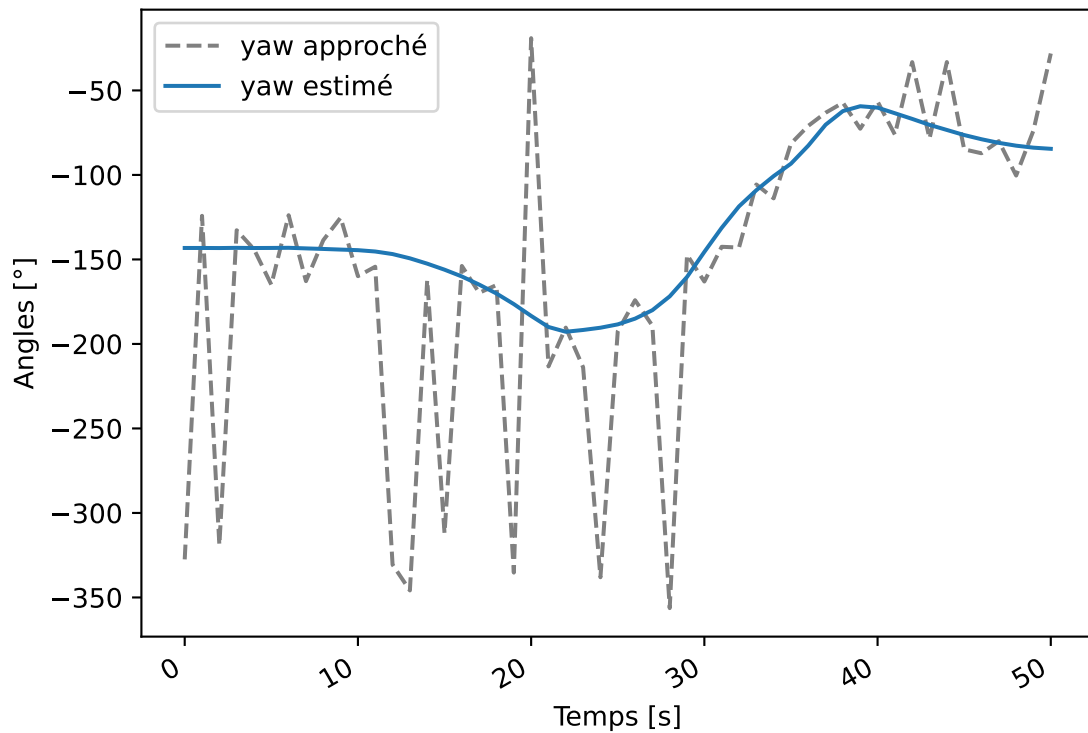


FIGURE 40 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

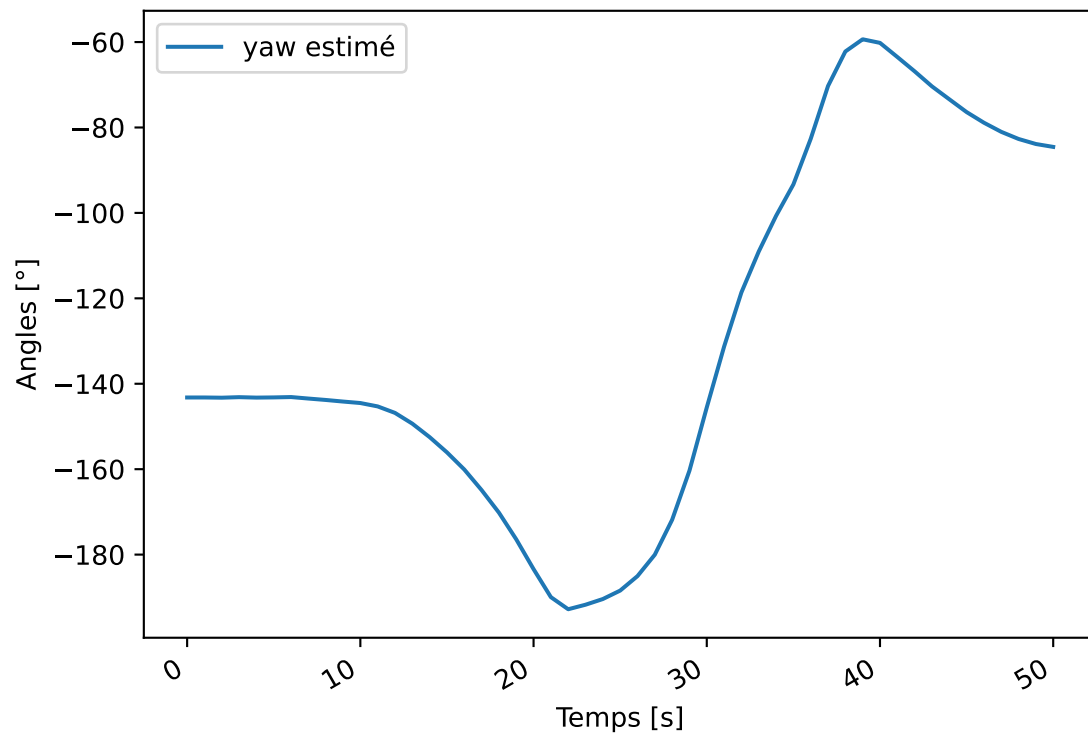


FIGURE 41 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

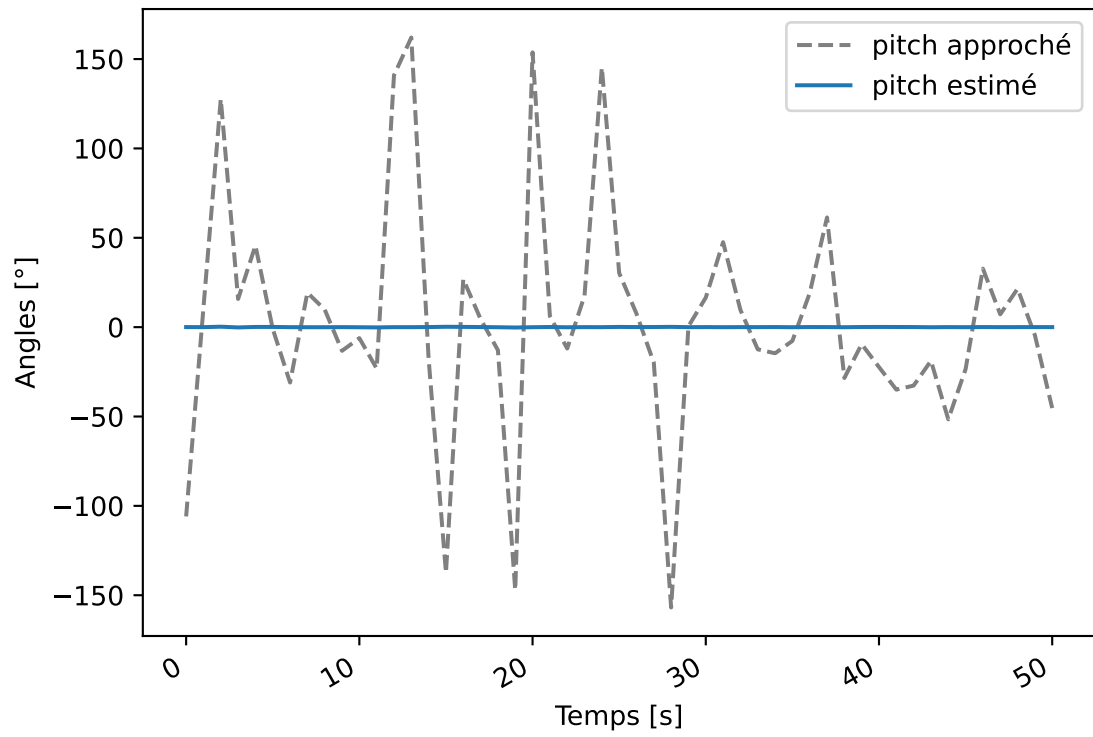


FIGURE 42 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

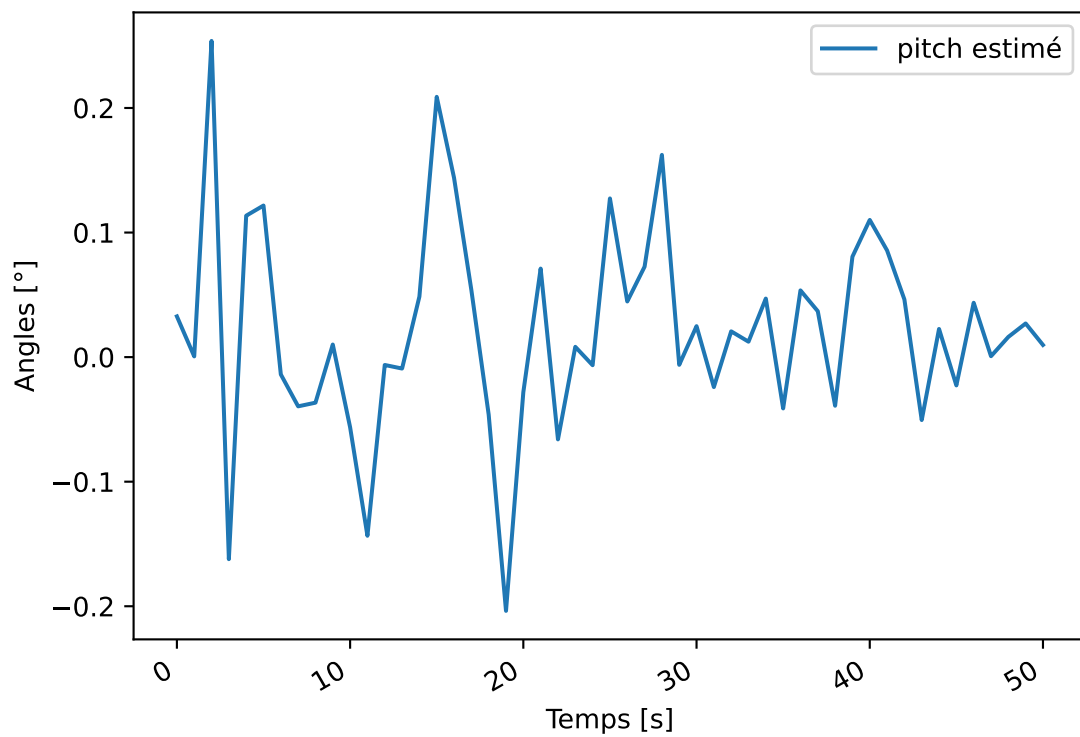


FIGURE 43 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

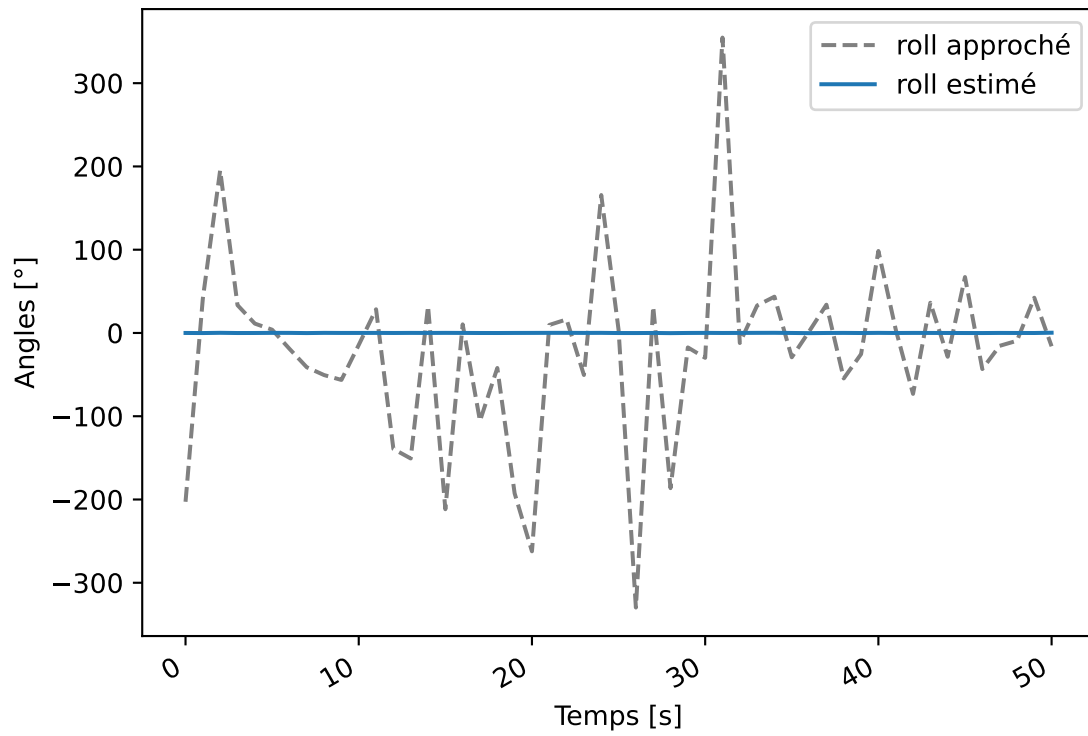


FIGURE 44 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

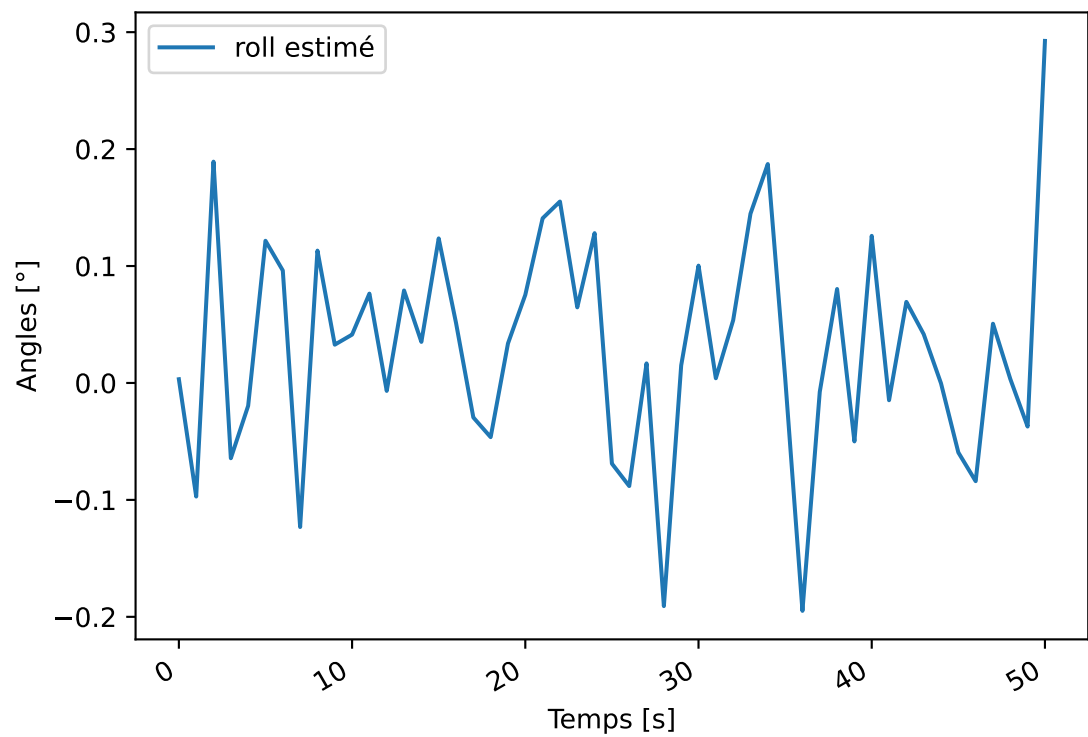


FIGURE 45 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

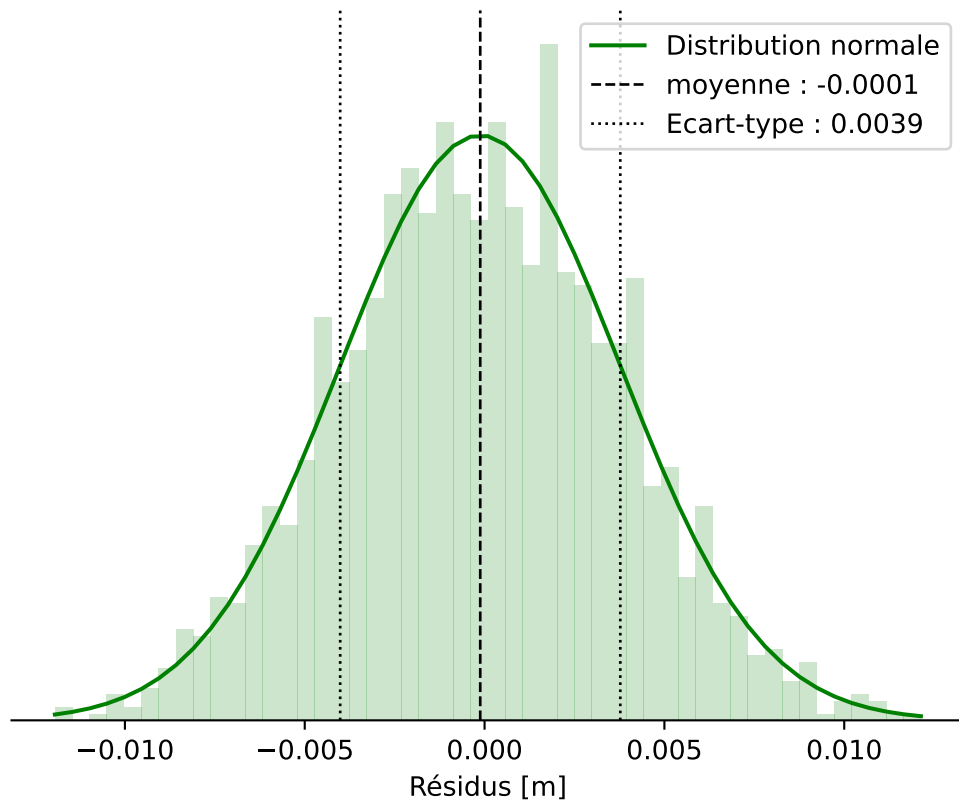


FIGURE 46 – Résidus

Les résidus présentés sur la figure 36 sont semblables au calcul précédent.

18.3.6 Conclusion - Données simulées

Les différents tests menés avec des données simulées ont permis de valider les algorithmes de calcul de l'attitude de la plateforme, tout d'abord dans des conditions idéalement parfaites, puis en ajoutant du bruit et des sauts de cycles.

La détermination des inconnues approchées est la clé pour un calcul qui converge plus facilement. La détermination de la position de chaque antenne par un simple positionnement absolu sur le code permet de trouver des valeurs approchées qui sont directement affectée par le bruit de la mesure brute sur le code. La méthode de détermination des quaternions approchés par un calcul de Helmert 3D semble être une bonne solution puisqu'elle utilise les observations de toutes les antennes. Même si les quaternions approchés sont souvent éloignés des valeurs vraies, le calcul fini par converger. On remarque également que pour les époques où la plateforme reste statique, les quaternions approchés sont moins précis que pour les époques où la plateforme est en mouvement.

En effectuant un calcul d'attitude avec des mesures entachées d'un saut de cycle, le calcul donne les mêmes résultats qu'avec des observations sans saut de cycle. En effet, le calcul détermine simplement une nouvelle ambiguïté pour les époques après le saut de cycle.

Grâce aux tests avec des données simulées, on peut constater que la précision des angles estimée est d'environ 0.03° pour $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et d'environ 0.14° pour les angles $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$, en utilisant des observations de double-différences avec un bruit de 0.004 m.

19 Données réelles

Pour pouvoir réaliser des tests en conditions réelles, il a tout d'abord fallu construire une plateforme et déterminer la position de chaque antenne dans le système body. Cette opération est décrite au chapitre 19.1. Les tests réels se sont ensuite déroulés en 2 parties.

- Le premier test a été de fixer la plateforme sur un trépied et de la laisser immobile et à l'horizontale durant quelques minutes. Ensuite, la plateforme a subi une rotation d'environ 90° autour de l'axe z dans un sens puis dans l'autre pour revenir à l'orientation initiale.
- Dans un deuxième temps, la plateforme a été placée sur le toit d'une voiture et un parcours de plusieurs kilomètres à travers la ville d'Yverdon-les-Bains jusque dans les plaines de l'Orbe a été effectué.

19.1 Détermination du système de la plateforme (body)

La plateforme utilisée pour réaliser les tests dans des conditions réelles est une planche carrée en bois d'environ 1 m de côté. Un trou au centre de la planche permet de la fixer sur un trépied. Un goujon CFF a été placé dans chaque coin de la plateforme afin de pouvoir y fixer une antenne ou un prisme. Les antennes utilisées sont des antennes géodésiques Leica GS10. Des mesures à la station totale ont été effectuées dans un repère local standard afin de déterminer la position des prismes fixés sur les goujons, comme on le montre l'image 47.



FIGURE 47 – Plateforme réelle

Un repère orthonormé a été calculé à partir des coordonnées des antennes via une orthonormalisation de Gram-Schmidt.

N° antenne	x^{sttot}	y^{sttot}	z^{sttot}
1	997.2723	1001.7000	499.6366
2	996.5649	1002.3520	499.6380
3	997.2175	1003.0568	499.6093
4	997.9252	1002.4002	499.6053

Les coordonnées des antennes sont simplement translatées afin que l'antenne 1 corresponde au centre du système de coordonnées de la plateforme.

N° antenne	x^{sttot}	y^{sttot}	z^{sttot}
1	+0.0000	+0.0000	+0.0000
2	-0.7074	+0.6520	+0.0014
3	-0.0548	+1.3568	-0.0273
4	+0.6529	+0.7002	-0.0313

Comme les vecteurs définis par les coordonnées des antennes ne sont pas forcément orthonormés, il est nécessaire de procéder à une orthonormalisation de Gram-Schmidt afin de calculer des vecteurs de base orthonormés. Les

vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 doivent être linéairement indépendants et sont construits à partir des lignes de base 1-2, 1-3 et 1-4.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.7074 \\ +0.6520 \\ +0.0014 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.0548 \\ +1.3568 \\ -0.0273 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} +0.6529 \\ +0.7002 \\ -0.0313 \end{pmatrix} \quad (19.1)$$

Le calcul des vecteurs de base par une orthonormalisation de Gram-Schmidt se déroule selon les étapes décrites ci-dessous. Pour plus de détails, le lecteur se référera à (Guillaume, 2021).

1. Calcul du vecteur \mathbf{e}_1 , colinéaire au vecteur \mathbf{v}_1 :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \quad (19.2)$$

2. Calcul du vecteur \mathbf{e}_2 , perpendiculaire au vecteur \mathbf{e}_1 dans le plan défini par les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Le vecteur \mathbf{e}_2 est colinéaire au vecteur \mathbf{w}_2 qui est lui-même obtenu par soustraction de la projection orthogonale de \mathbf{v}_2 sur le vecteur \mathbf{v}_1 , et le vecteur \mathbf{v}_2 .

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (19.3)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} \quad (19.4)$$

3. Calcul du vecteur \mathbf{u}_3 , perpendiculaire au vecteur \mathbf{e}_2 dans le plan défini par les vecteurs \mathbf{e}_2 et \mathbf{w}_3 , lui-même perpendiculaire au vecteur \mathbf{e}_1 , dans le plan défini par les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_3 :

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (19.5)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 - (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \quad (19.6)$$

Par simplification, le vecteur \mathbf{u}_3 peut être écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \quad (19.7)$$

Le vecteur \mathbf{e}_3 est colinéaire au vecteur \mathbf{u}_3 :

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} \quad (19.8)$$

On obtient ainsi les vecteurs de base du système de la plateforme, exprimés dans le système standard de la station totale :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} +0.681608 \\ +0.730988 \\ -0.0326763 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.731349 \\ +0.682002 \\ +0.00126467 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} +0.0232097 \\ +0.0230357 \\ +0.999465 \end{pmatrix} \quad (19.9)$$

Pour passer du système de la station totale au système de la plateforme, on applique la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{body}} \\ y^{\text{body}} \\ z^{\text{body}} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{\text{body}})^T \cdot (\mathbf{o}^{\text{sttot}} - \mathbf{o}^{\text{body}}) + (\mathbf{T}^{\text{body}})^T \cdot \mathbf{T}^{\text{sttot}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{sttot}} \\ y^{\text{sttot}} \\ z^{\text{sttot}} \end{pmatrix} \quad (19.10)$$

Les vecteurs de base du système de la station totale sont les suivants :

$$\mathbf{o}^{\text{sttot}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{sttot}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{sttot}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{sttot}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19.11)$$

$$(19.12)$$

Les vecteurs de base du système de la plateforme, exprimés dans le système standard de la station totale sont les suivants :

$$\mathbf{o}^{\text{body}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{body}} = \begin{pmatrix} +0.681608 \\ +0.730988 \\ -0.0326763 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} = \begin{pmatrix} -0.731349 \\ +0.682002 \\ +0.00126467 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}} = \begin{pmatrix} +0.0232097 \\ +0.0230357 \\ +0.999465 \end{pmatrix} \quad (19.13)$$

Les matrices de transformations des deux systèmes sont les suivantes :

$$\mathbf{T}^{\text{sttot}} = (\mathbf{e}_x^{\text{sttot}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{sttot}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{sttot}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.14)$$

$$\mathbf{T}^{\text{body}} = (\mathbf{e}_x^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}}) = \begin{pmatrix} +0.681608 & -0.731349 & +0.0232097 \\ +0.730988 & +0.682002 & +0.0230357 \\ -0.0326763 & +0.00126467 & +0.999465 \end{pmatrix} \quad (19.15)$$

On trouve les coordonnées des 4 antennes dans le système body en appliquant la formule suivante :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{body}} \\ y^{\text{body}} \\ z^{\text{body}} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{\text{body}})^T \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{sttot}} \\ y^{\text{sttot}} \\ z^{\text{sttot}} \end{pmatrix} \quad (19.16)$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{\text{body}} \\ y_1^{\text{body}} \\ z_1^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.681608 & +0.730988 & -0.0326763 \\ -0.731349 & +0.682002 & +0.00126467 \\ +0.0232097 & +0.0230357 & +0.999465 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +0.0000 \\ +0.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.0000 \\ +0.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (19.17)$$

$$\begin{pmatrix} x_2^{\text{body}} \\ y_2^{\text{body}} \\ z_2^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.681608 & +0.730988 & -0.0326763 \\ -0.731349 & +0.682002 & +0.00126467 \\ +0.0232097 & +0.0230357 & +0.999465 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.7074 \\ +0.6520 \\ +0.0014 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0056 \\ +0.9620 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (19.18)$$

$$\begin{pmatrix} x_3^{\text{body}} \\ y_3^{\text{body}} \\ z_3^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.681608 & +0.730988 & -0.0326763 \\ -0.731349 & +0.682002 & +0.00126467 \\ +0.0232097 & +0.0230357 & +0.999465 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.0548 \\ +1.3568 \\ -0.0273 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.9553 \\ +0.9654 \\ +0.0027 \end{pmatrix} \quad (19.19)$$

$$\begin{pmatrix} x_4^{\text{body}} \\ y_4^{\text{body}} \\ z_4^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.681608 & +0.730988 & -0.0326763 \\ -0.731349 & +0.682002 & +0.00126467 \\ +0.0232097 & +0.0230357 & +0.999465 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +0.6529 \\ +0.7002 \\ -0.0313 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.9579 \\ +0.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (19.20)$$

N° antenne	x^{body}	y^{body}	z^{body}
1	+0.0000	+0.0000	+0.0000
2	-0.0056	+0.9620	+0.0000
3	+0.9553	+0.9654	+0.0027
4	+0.9579	+0.0000	+0.0000

Une deuxième détermination tachéométrique a été effectuée pour avoir un contrôle.

1. Mesures tachéométriques :

N° antenne	x^{sttot}	y^{sttot}	z^{sttot}
1	1997.6702	1998.1894	499.6644
2	1996.8668	1998.7197	499.6658
3	1997.3970	1999.5209	499.6369
4	1998.2016	1998.9857	499.6330

2. Réduction des mesures :

N° antenne	x^{sttot}	y^{sttot}	z^{sttot}
1	+0.0000	+0.0000	+0.0000
2	-0.8034	+0.5303	+0.0014
3	-0.2732	+1.3315	-0.0275
4	+0.5314	+0.7963	-0.0314

3. Vecteurs définis par les coordonnées réduites :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.8034 \\ +0.5303 \\ +0.0014 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.2732 \\ +1.3315 \\ -0.0275 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} +0.5314 \\ +0.7963 \\ -0.0314 \end{pmatrix} \quad (19.21)$$

4. Détermination des vecteurs de base :

$$\mathbf{o}^{\text{body}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{body}} = \begin{pmatrix} +0.554787 \\ +0.831346 \\ -0.0327819 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} = \begin{pmatrix} -0.831769 \\ +0.55512 \\ +0.00128751 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}} = \begin{pmatrix} +0.0192683 \\ +0.0265527 \\ +0.999462 \end{pmatrix} \quad (19.22)$$

$$\mathbf{T}^{\text{body}} = (\mathbf{e}_x^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{body}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{body}}) = \begin{pmatrix} +0.554787 & -0.831769 & +0.0192683 \\ +0.831346 & +0.55512 & +0.0265527 \\ -0.0327819 & +0.00128751 & +0.999462 \end{pmatrix} \quad (19.23)$$

5. Calcul des coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1^{\text{body}} \\ y_1^{\text{body}} \\ z_1^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.554787 & -0.831769 & +0.0192683 \\ +0.831346 & +0.55512 & +0.0265527 \\ -0.0327819 & +0.00128751 & +0.999462 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +0.0000 \\ +0.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.0000 \\ +0.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (19.24)$$

$$\begin{pmatrix} x_2^{\text{body}} \\ y_2^{\text{body}} \\ z_2^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.554787 & -0.831769 & +0.0192683 \\ +0.831346 & +0.55512 & +0.0265527 \\ -0.0327819 & +0.00128751 & +0.999462 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.8034 \\ +0.5303 \\ +0.0014 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0049 \\ +0.9626 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (19.25)$$

$$\begin{pmatrix} x_3^{\text{body}} \\ y_3^{\text{body}} \\ z_3^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.554787 & -0.831769 & +0.0192683 \\ +0.831346 & +0.55512 & +0.0265527 \\ -0.0327819 & +0.00128751 & +0.999462 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.2732 \\ +1.3315 \\ -0.0275 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.9563 \\ +0.9663 \\ +0.0026 \end{pmatrix} \quad (19.26)$$

$$\begin{pmatrix} x_4^{\text{body}} \\ y_4^{\text{body}} \\ z_4^{\text{body}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.554787 & -0.831769 & +0.0192683 \\ +0.831346 & +0.55512 & +0.0265527 \\ -0.0327819 & +0.00128751 & +0.999462 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +0.5314 \\ +0.7963 \\ -0.0314 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.9578 \\ +0.0000 \\ +0.0000 \end{pmatrix} \quad (19.27)$$

N° antenne	x^{body}	y^{body}	z^{body}
1	+0.0000	+0.0000	+0.0000
2	-0.0049	+0.9626	+0.0000
3	+0.9563	+0.9663	+0.0026
4	+0.9578	+0.0000	+0.0000

On peut calculer les différences de coordonnées entre les 2 déterminations pour vérifier qu'il n'y a pas eu de faute dans les mesures :

N° antenne	x_1^{body}	y_1^{body}	z_1^{body}	x_2^{body}	y_2^{body}	z_2^{body}	Δx^{body}	Δy^{body}	Δz^{body}
1	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000
2	-0.0056	+0.9620	+0.0000	-0.0049	+0.9626	+0.0000	+0.0007	+0.0006	+0.0000
3	+0.9553	+0.9654	+0.0027	+0.9563	+0.9663	+0.0026	+0.0010	+0.0009	-0.0001
4	+0.9579	+0.0000	+0.0000	+0.9578	+0.0000	+0.0000	-0.0001	+0.0000	+0.0000

On remarque que les écarts sont de l'ordre d'1 mm au maximum, ce qui permet de valider les mesures et de calculer la moyenne des coordonnées entre les deux déterminations, pour arriver aux coordonnées finales, arrondies au mm.

N° antenne	x^{body}	y^{body}	z^{body}
1	+0.000	+0.000	+0.000
2	-0.005	+0.962	+0.000
3	+0.956	+0.966	+0.003
4	+0.958	+0.000	+0.000

19.2 Configuration des tests et préparation des données

Les antennes utilisées sont des antennes géodésiques Leica GS10, parfaitement synchronisées entre elles. Elles ont toutes été orientées dans la même direction afin d'éviter les problèmes de variation du centre de phase. Les quatre récepteurs ont été configurés pour enregistrer les données GNSS brutes en mode cinématique, c'est-à-dire qu'ils stockent des données même s'ils ne restent pas statiques sur un point fixe. La fréquence de mesure est de 1 Hz et il y a donc un intervalle de temps de 1 seconde entre chaque époque d'observation.

Une petite centrale inertielle (IMU) fixée sur la plateforme a enregistré des données à une fréquence de 100 Hz et sert de base de comparaison pour les angles d'attitude de la plateforme. Les caractéristiques des capteurs utilisés sont résumées dans le tableau 21.

TABLE 21: Caractéristiques des capteurs utilisés

Caractéristique	Valeur
Nb antennes GNSS	4
Type antennes GNSS	Leica GS10
Fréquence d'observations GNSS	1 Hz
Référentiel temporel	Temps GPS
Type centrale inertielle	MTi-680G
Précision centrale inertielle	$\pm 0.2^\circ$ (roll, pitch), $\pm 0.5^\circ$ (yaw)
Dérive gyroscopique	$4^\circ/\text{h}$
Fréquence d'observations IMU	100 Hz
Référentiel temporel	Temps UTC

Les observations brutes de l'antenne GNSS permanente située sur le toit du bâtiment de la HEIG-VD ont également été récupérées afin de pouvoir éventuellement recalculer la position des récepteurs par un calcul de ligne de base entre l'antenne permanente et les antennes de la plateforme. Ce calcul de contrôle n'a finalement pas été nécessaire puisque les tests ont donné de bons résultats sans devoir recalculer les positions des antennes avec un calcul de lignes de base.

19.2.1 Export des observations RINEX

Avec les récepteurs GNSS utilisés, les fichiers RINEX des données GNSS brutes ne sont pas directement accessibles lorsque le mode d'acquisition est paramétré en cinématique. Ainsi, les données sont enregistrées dans un fichier propriétaire *.m00. Pour exporter les données brutes dans un fichier RINEX, il est donc nécessaire de passer par le logiciel Leica Infinity. C'est la seule intervention de ce logiciel dans toute la chaîne de traitements. Les fichiers d'observations RINEX ont ensuite pu être utilisés dans le programme de calcul de l'attitude de la plateforme.

19.2.2 Centrale inertielle

Pour pouvoir comparer les angles issus de la centrale inertielle avec les angles calculés à partir des mesures GNSS, plusieurs étapes ont été effectuées. Puisque les mesures brutes de la centrale inertielle sont enregistrées dans un fichier *.mtb, il est nécessaire de passer par le logiciel de gestion de la centrale inertielle (MT Manager) pour en extraire les informations souhaitées. Le programme permet d'extraire, pour chaque époque de mesures, les éléments de la matrice de rotation, les quaternions unitaires ou encore les valeurs des angles d'Euler. Dans le cas de ce projet, le choix a été fait d'extraire directement la matrice de rotation afin de pouvoir calculer les angles selon les conventions de ce projet et non pas selon les conventions utilisées par la centrale inertielle.

Ainsi, pour chaque époque de mesure, la date et l'heure UTC ainsi que les éléments de la matrice de rotation ont été exportés. Pour pouvoir comparer ces résultats avec les résultats GNSS, il est nécessaire d'appliquer un décalage temporel de 18 secondes, ce qui correspond au décalage temporel entre le temps UTC et le temps GPS. De plus, puisque la centrale inertielle mesure des angles relatifs par rapport à l'état initial, les valeurs doivent être corrigées de la différence angulaire initiale d'avec l'angle absolu déterminé par GNSS. Comme la centrale inertielle a été initialisée alors que la plateforme avait une orientation quelconque (ni orientée au nord géographique, ni à l'horizontale), il faut calculer une correction pour chacun des trois angles.

19.3 Test 1 - Plateforme sur un trépied

Pour le premier test, la plateforme a été fixée sur un trépied (figure 48). Elle est donc restée sur le même point tout au long de l'expérience, en subissant toutefois une rotation d'environ 90° sur elle-même, dans un sens puis dans l'autre, avant de revenir dans sa position initiale.



FIGURE 48 – Test avec la plateforme fixée sur un trépied et tournant sur elle-même

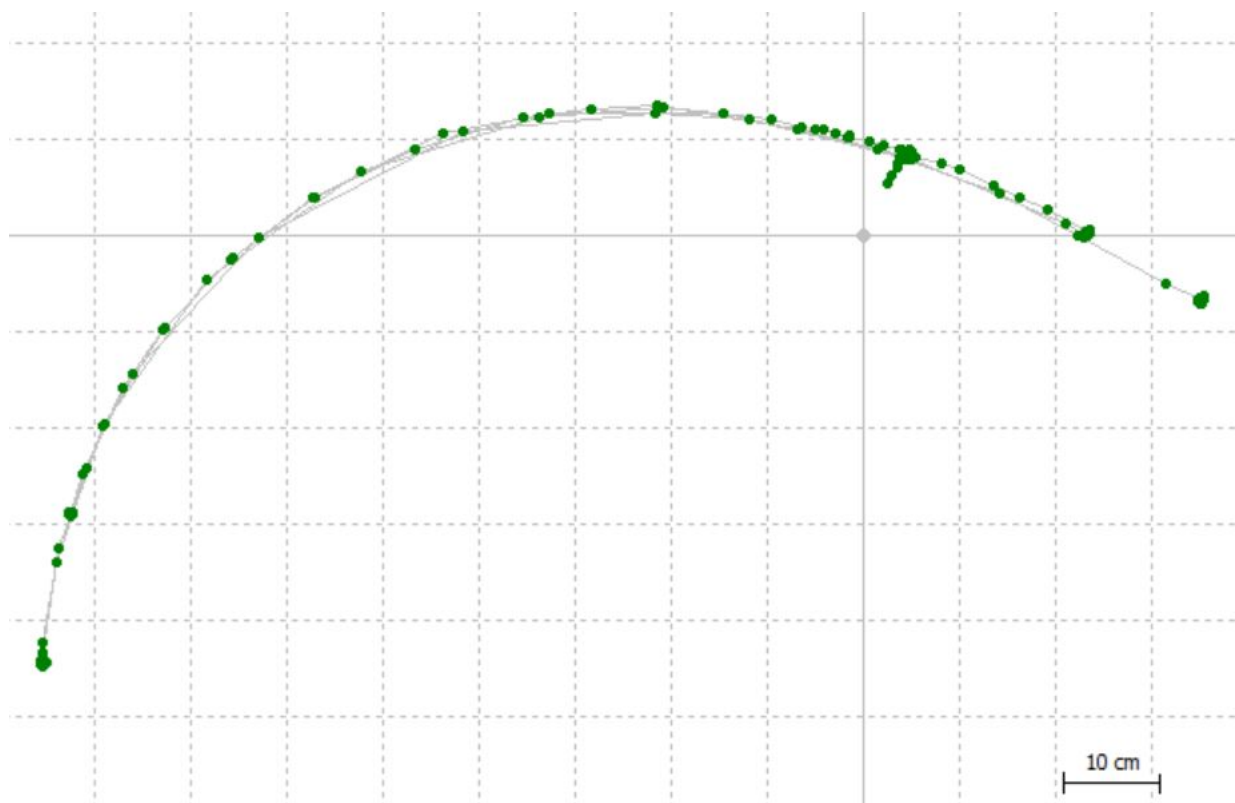


FIGURE 49 – Trajectoire d'une antenne de la plateforme

La figure 49 montre la trajectoire d'une antenne de la plateforme calculé par moving-baseline avec RTKLIB. Puisque la plateforme a subi une rotation tout en restant sur le même point, la trajectoire est un arc de cercle. Ce test décrit dans ce paragraphe a pour objectif de tester les algorithmes avec des données réelles, dans un cas

où la plateforme ne se déplace pas.

Le tableau 22 montre les principales caractéristiques du calcul d'attitude de la plateforme fixée sur le trépied. La durée d'observation est de 3 minutes, ce qui correspond à 180 époques de mesures. Dans le pré-traitement des observations, aucun saut de cycle n'a été détecté. Les quaternions approchés ont été définis via un calcul d'Helmert 3D pour chaque époque en utilisant la position absolue sur le code des 4 antennes de la plateforme.

TABLE 22: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Etat plateforme	Statique avec rotation autour de l'axe z
Début	UTC 07h 55min 0sec
Fin	UTC 07h 58min 0sec
Nombre d'époques	180
Position approchée	Positionnement absolu sur le code
Gestion des sauts de cycles	Pas de sauts de cycle détectés
Masque	15°
Quaternions approchés	Helmert 3D
Estimation flottante	Quaternions libérés, ambiguïtés libérées
Estimation fixe	Quaternions libérés, ambiguïtés fixées

19.3.1 Détermination des angles d'attitude

Le tableau 23 présente les principaux résultats du calcul d'attitude.

TABLE 23: Résultats calcul

Paramètre	Valeur
Nb itérations (ambiguïtés flottantes)	8
Ratio LAMBDA	$4.77 \cdot 10^{-8}$
Nb itérations (ambiguïtés fixées)	3
Nb observations	4363
Nb inconnues	747
Nb conditions	207
Surabondance	3823
σ_0 [m]	0.006
s_0 [m]	0.0056
Quotient d'erreur moyenne	0.93
σ_{yaw} [°]	0.081 ± 0.02929
σ_{pitch} [°]	0.335 ± 0.00331
σ_{roll} [°]	0.334 ± 0.00393

Il est important de noter que même si les ambiguïtés ont été fixées avec l'algorithme LAMBDA, le ratio est très faible. Toutefois, en comparant les ambiguïtés de la meilleure solution avec la deuxième et la troisième meilleure solution, les ambiguïtés sont exactement les mêmes. Il faudrait mener des investigations plus approfondies pour comprendre pourquoi ce ratio est tellement faible.

De plus, pour ce calcul, l'écart-type des observations de zéro-différence de phase a été défini à 0.003 m (au lieu de 0.002 m pour les tests précédents), ce qui correspond à une précision de 0.006 m pour une observation de double-différence. L'écart-type théorique de l'unité de poids est alors de 0.006 m alors que l'écart-type empirique est de 0.0056 m, ce qui correspond à un quotient d'erreur moyenne de 0.93, ce qui reste tout-à-fait réaliste. La précision des angles obtenus par ce calcul est de 0.081° pour y_{body}^{topo} et de 0.335 pour les angles r_{body}^{topo} et p_{body}^{topo} . Ces valeurs sont légèrement moins bonnes que les valeurs obtenues par simulation. Cela pourrait s'expliquer par le fait que les mesures de ce test sont peut-être un peu plus bruitées que celles utilisées dans les simulations.

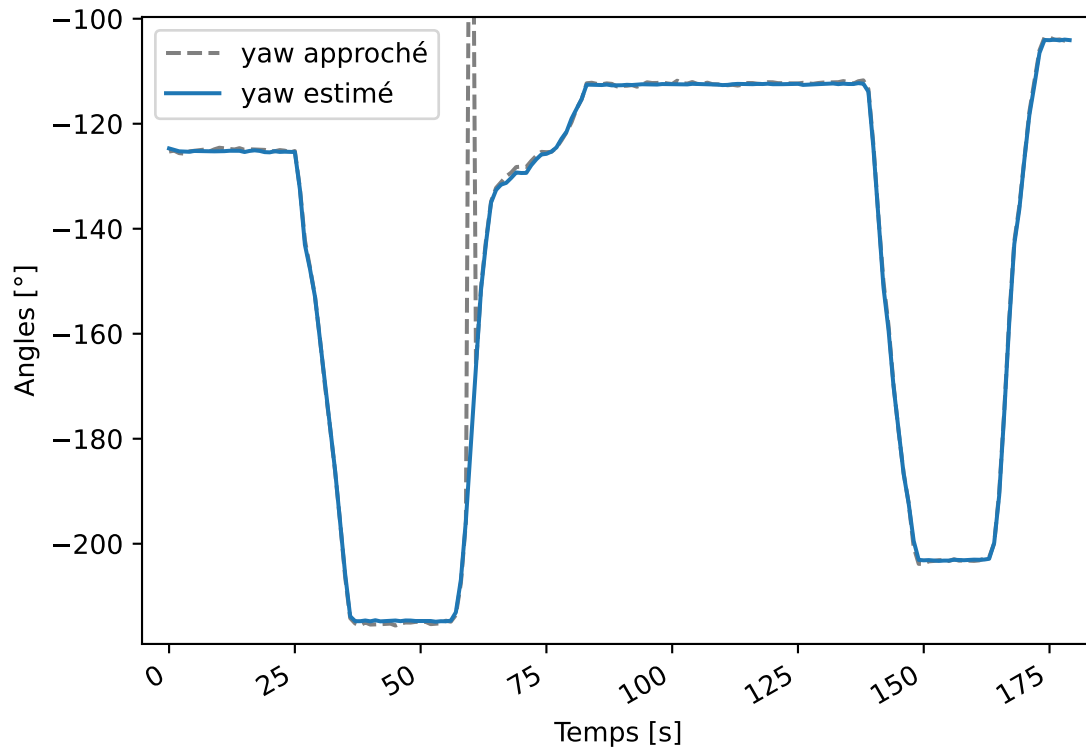
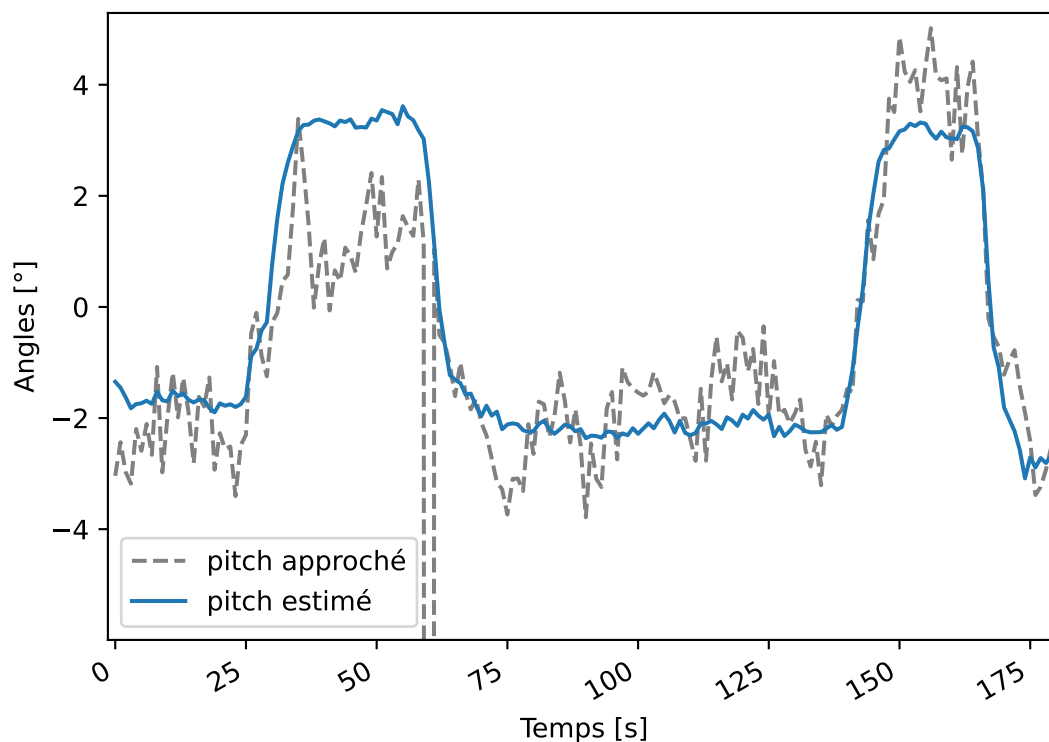
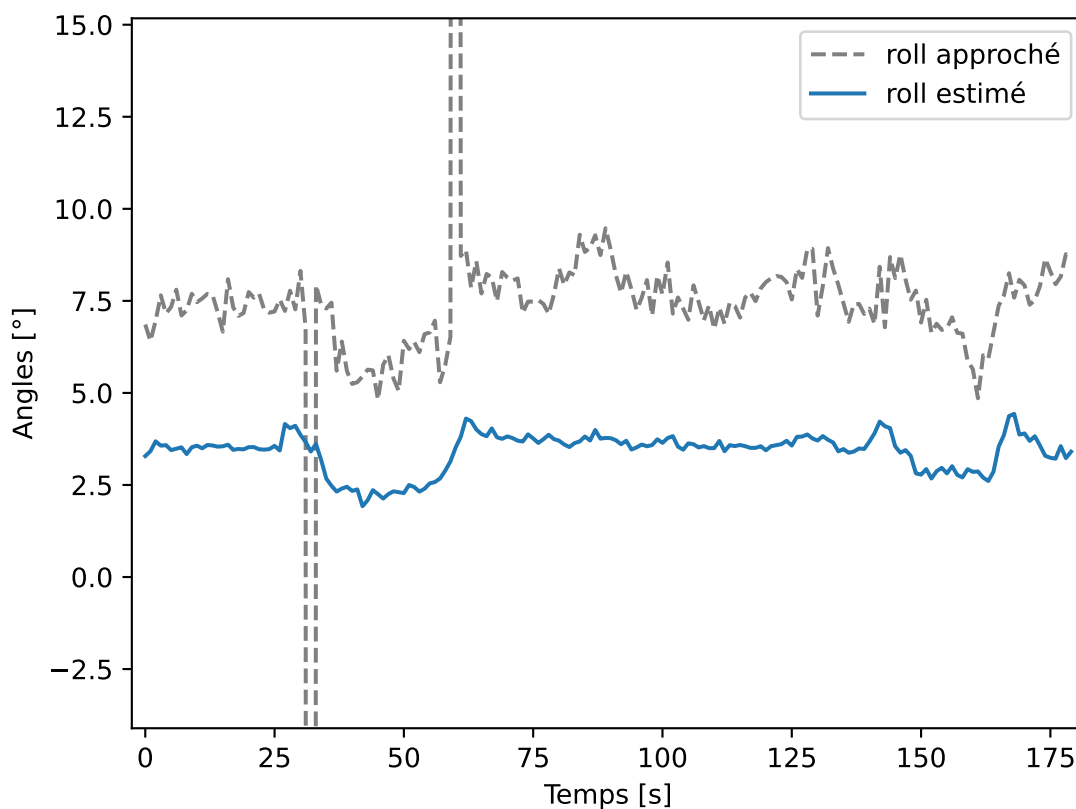


FIGURE 50 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

Sur la figure 50, on remarque deux créneaux dans le graphique avec des différences angulaires d'environ 90° . En effet, la plateforme a été tournée de 90° dans un sens puis dans l'autre et cette opération a été répétée deux fois. On retrouve également des variations pour les angles pitch et roll dues au fait que la plateforme n'était pas à l'horizontale, ce qui implique une rotation non-nulle autour des trois axes (figures 51 et 52).

FIGURE 51 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)FIGURE 52 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

En analysant les figures 50, 51 et 52, on s'aperçoit que les valeurs approchées sont très proches des valeurs estimées. Cependant, les angles approchés sont calculés à partir de la position absolue sur le code de chaque récepteur. On aurait donc pu s'attendre à des valeurs relativement aléatoires pour les inconnues approchées. Il s'agit probablement d'une coïncidence, car on ne s'attend pas à ce que les positions sur le code puissent fournir des angles approchés autant proches des valeurs estimées. En regardant la figure 52, on voit qu'il y a un décalage systématique d'environ 3° entre les valeurs approchées et les valeurs estimées. Il est possible que cela soit dû au problème de résolution des ambiguïtés, mais ce n'est pas sûr.

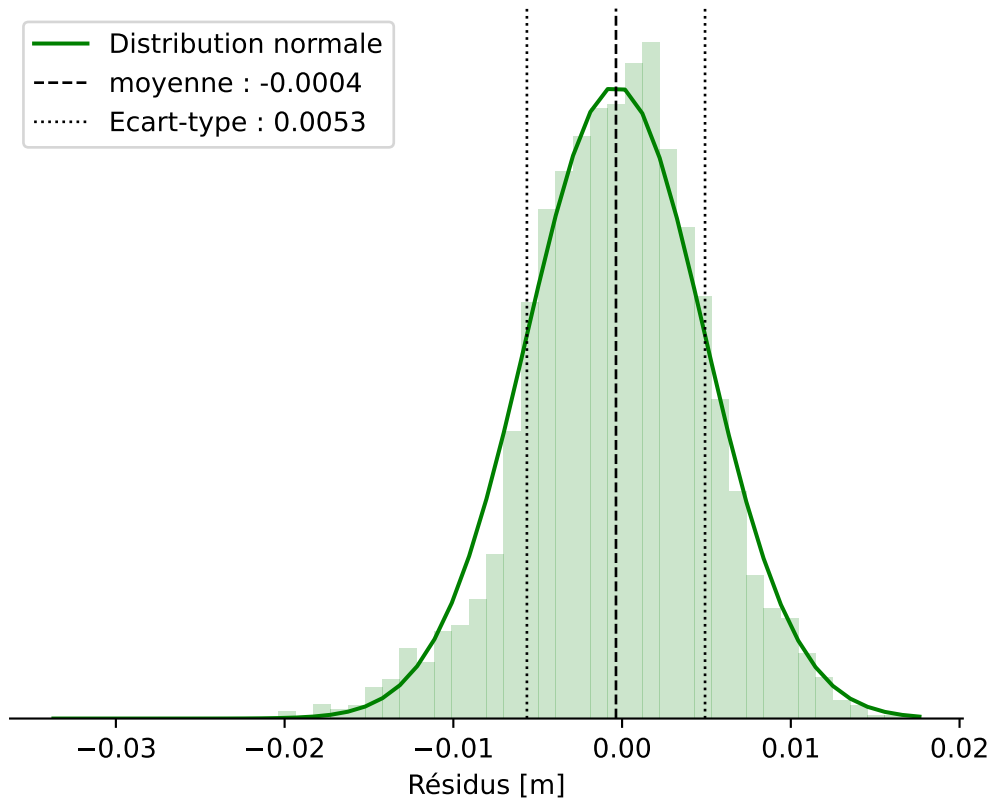


FIGURE 53 – Résidus

En analysant les résidus sur les observations de double-différences de phase, présentés sur la figure 53, on remarque que l'écart-type (0.0053) correspond environ à l'écart-type théorique de l'unité de poids (0.006 m). On voit également que la distribution des résidus suit une distribution normale (courbe de Gauss). Cela indique qu'il n'y a pas de problème majeur avec des résidus qui seraient complètement différents de l'écart-type auquel on peut s'attendre.

19.3.2 Comparaison des résultats

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus via l'estimation d'attitude implémentée dans ce projet avec les valeurs issues de la centrale inertielle ainsi qu'avec les valeurs calculées via un calcul de moving-baseline avec le logiciel GrafNAV (figures 54, 55 et 56). Pour réaliser ces comparaisons, les angles déduits des mesures inertielles ont été ramenés dans le même référentiel que celui du calcul d'attitude par GNSS.

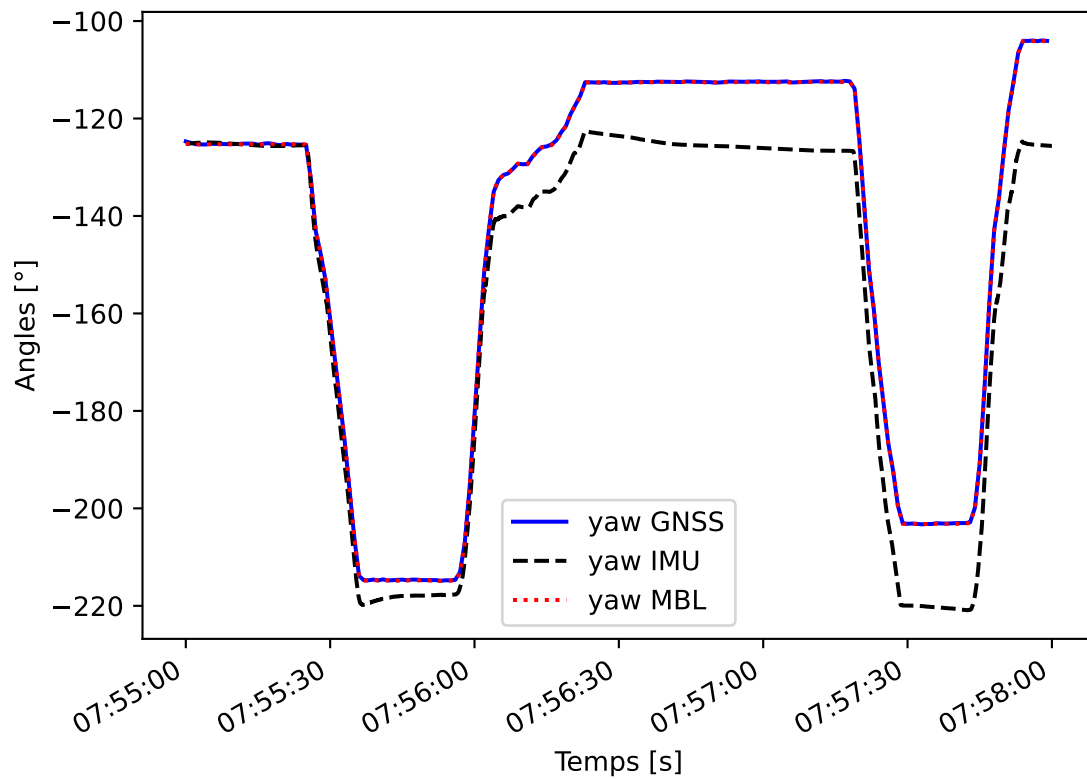


FIGURE 54 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

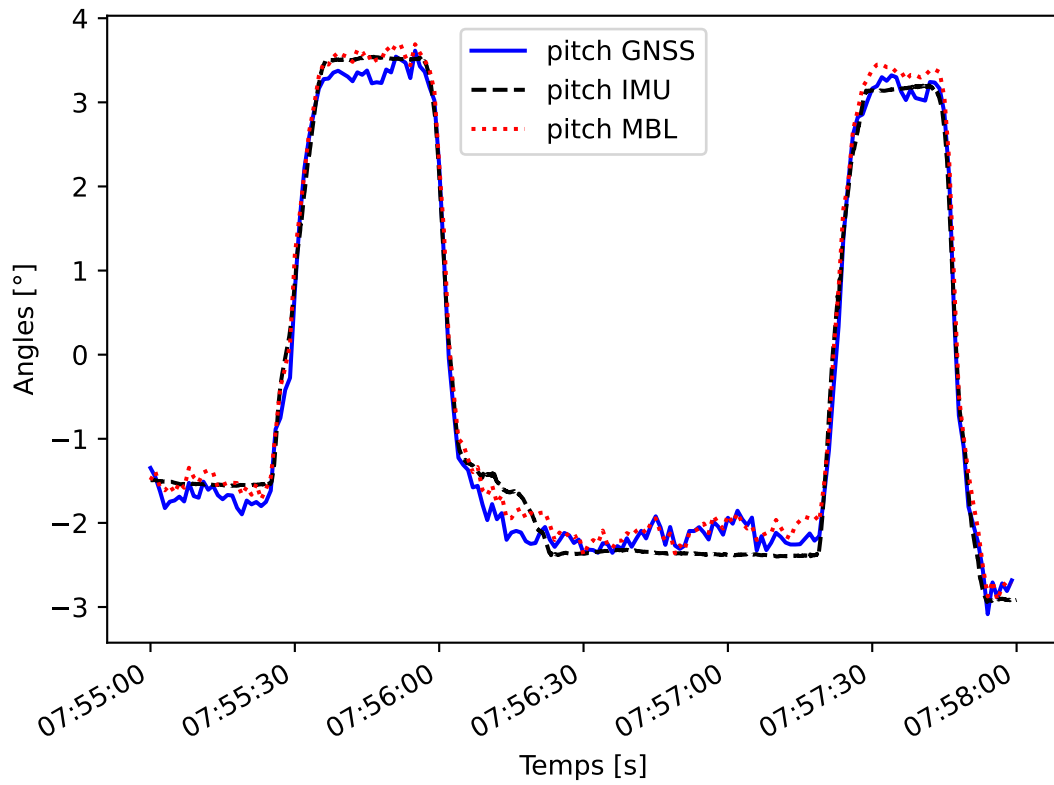


FIGURE 55 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

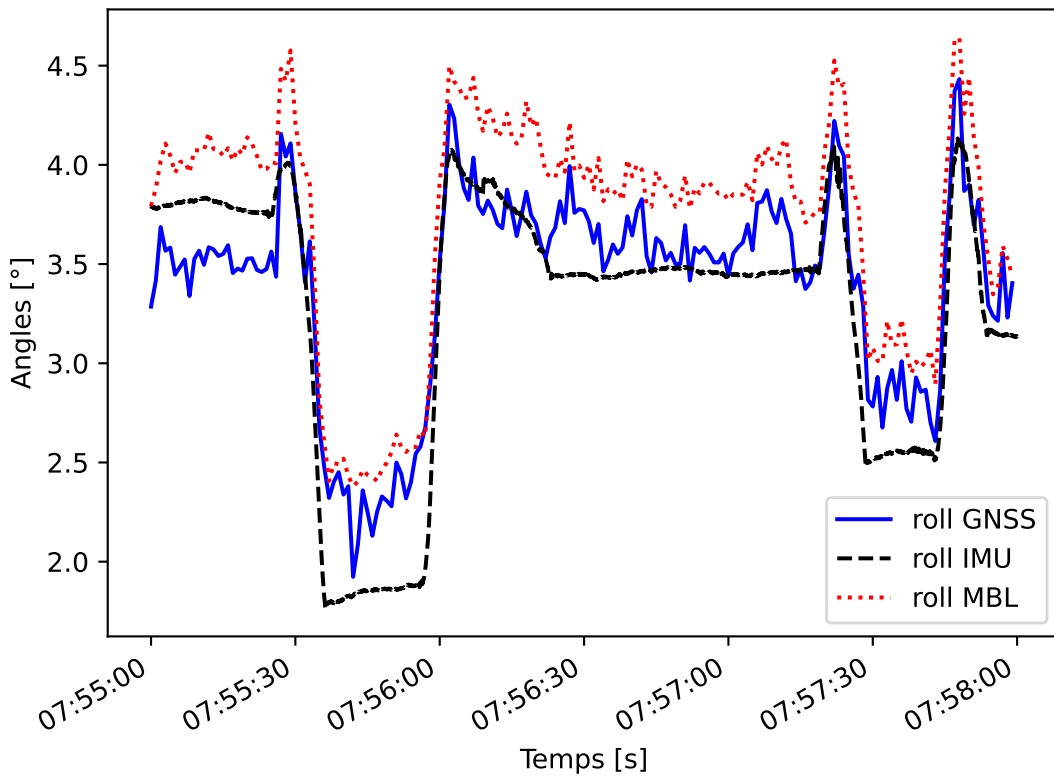


FIGURE 56 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

Un premier constat réjouissant est de voir que globalement les valeurs angulaires correspondent. On remarque que les valeurs calculées par l'algorithme du programme de détermination d'attitude et les valeurs issues du calcul de moving-baseline correspondent bien (figure 57), ce qui signifie que les deux manières de déterminer des angles d'attitude donnent les mêmes résultats dans un cas statique. On peut également calculer la différence entre la détermination d'attitude directe et les déterminations par

moving-baseline (figure 57) et les angles mesurés par la centrale inertielle (figure 58).

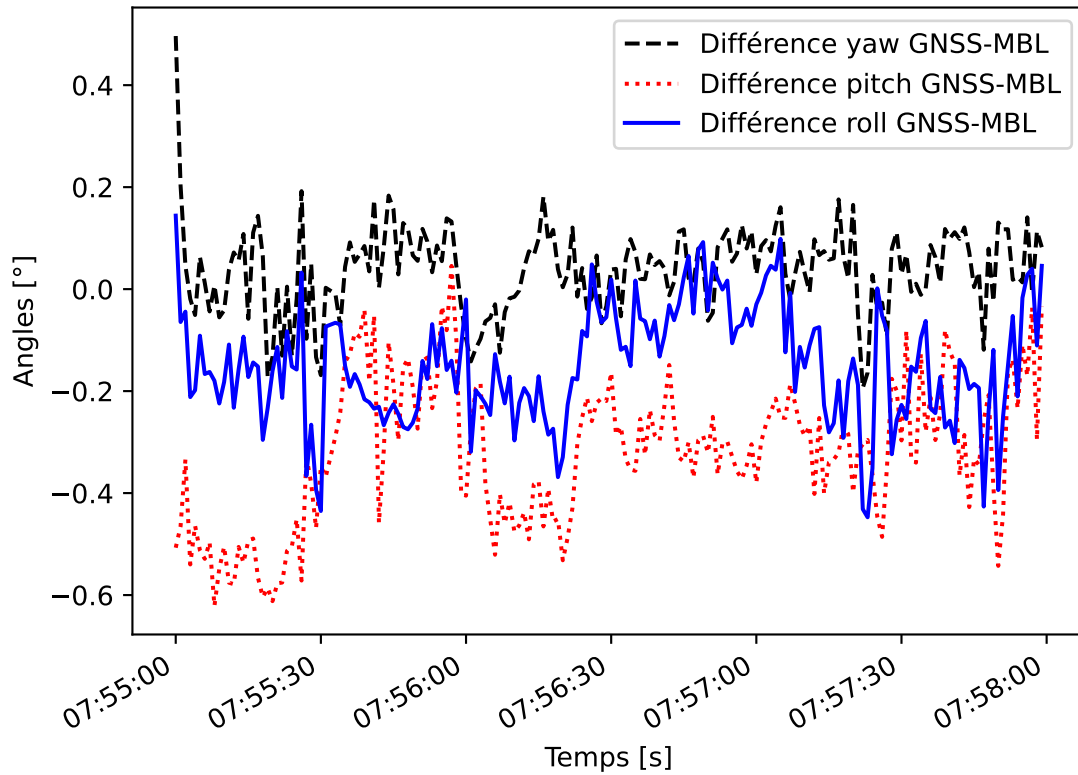


FIGURE 57 – Différences GNSS - MBL

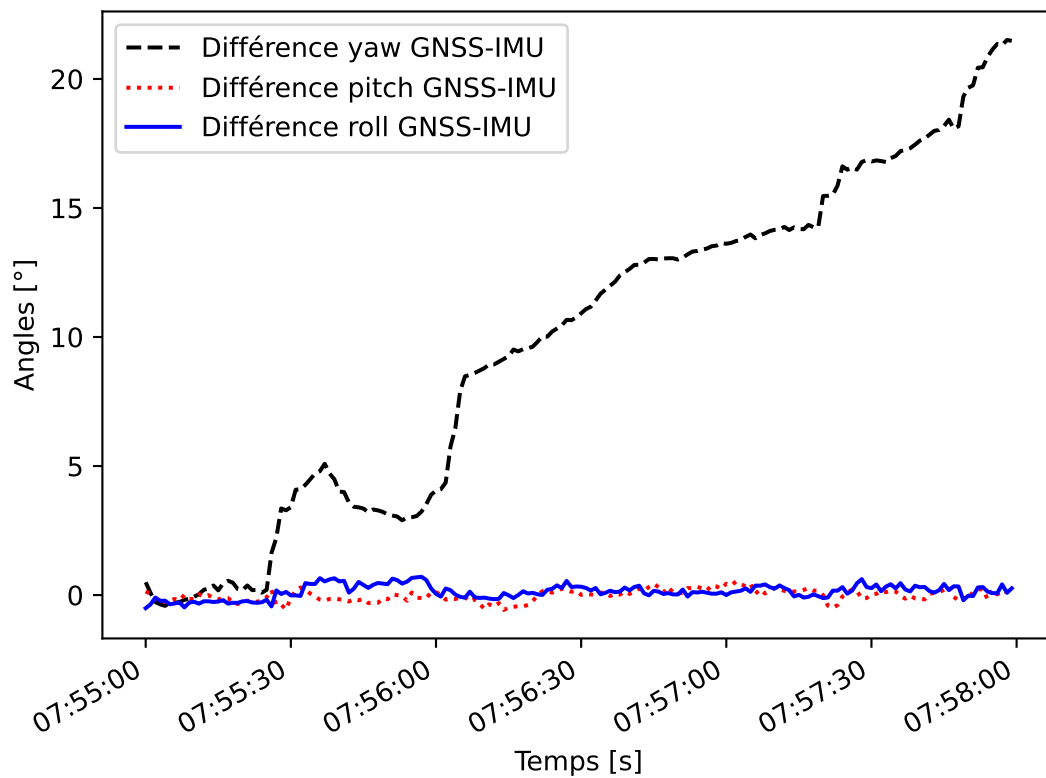


FIGURE 58 – Différences GNSS - IMU

On constate que la centrale inertielle a une importante dérive temporelle sur l'angle yaw (voir figures 54 et 58), ce qui signifie qu'elle ne peut pas déterminer à elle seule un angle absolu avec une précision suffisante. Ceci est d'autant plus vrai que la plateforme ne se déplace pas. En effet, la centrale inertielle ne subit pas

d'accélération qui pourrait aider à lutter contre la dérive. Cependant, en raison de sa fréquence d'observation élevée (100 Hz), elle peut être utilisée pour interpoler des valeurs angulaires entre 2 époques GNSS. Les différences entre une détermination d'attitude directe et une détermination via un calcul de Helmert 3D à partir de lignes de base cinématiques sont inférieures à 0.5° (figure 57), ce qui signifie que les deux déterminations donnent les mêmes résultats.

19.4 Test 2 - Plateforme en mouvement

Un deuxième test a été réalisé en fixant la plateforme sur le toit d'une voiture. L'objectif de ce test est de réussir à déterminer des angles d'attitude lorsque la plateforme est en mouvement.



FIGURE 59 – Test avec la plateforme fixée sur une voiture

Pour l'estimation des angles d'attitude lorsque la plateforme est en mouvement, les données ont été calculées à partir d'une petite fraction de la trajectoire effectuée avec la voiture, qui présente des variations angulaires bien visibles. La trajectoire commence au sud et présente 3 virages relativement marqués, comme on peut le voir sur la figure 60. L'image 61 est le résultat d'un calcul de positionnement différentiel sur la phase de l'antenne principale de la plateforme en utilisant l'antenne permanente de la HEIG-VD comme antenne de référence.

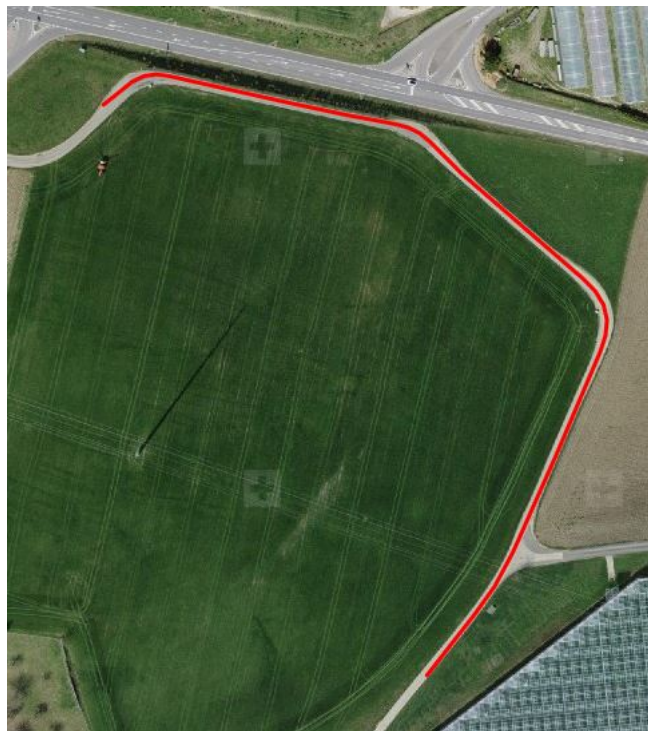


FIGURE 60 – Trajectoire plateforme (orthophoto)

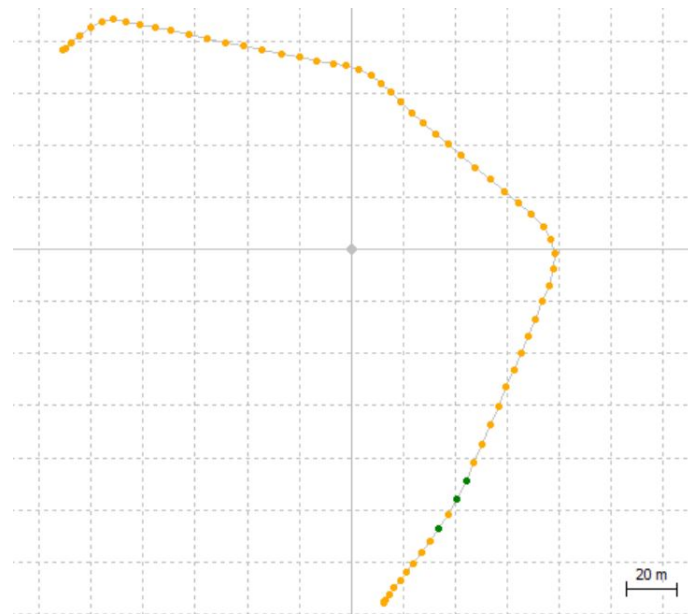


FIGURE 61 – Trajectoire plateforme (calculée par RTKLIB)

Les paramètres du calcul RTKLIB sont les suivants :

TABLE 24: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Time start [GPST]	2022/06/03 08-57-15
Time end [GPST]	2022/06/03 08-58-28
Fichier d'observations : Base station	YVD2154i.22o
Fichier d'observations : Rover	71101541.22o
Fichier de navigation	87101541.22n
Positioning Mode	Kinematic
Frequencies	L1
Filter type	Combined
Elevation mask	15°
Rec dynamics	OFF
Earth Tides Correction	OFF
Ionosphere Correction	Broadcast
Troposphere Correction	Saastamoinen
Satellite Ephemeris/Clock	Broadcast
Constellation	GPS

19.4.1 Détermination des angles d'attitude

Le tableau 25 présente les principaux paramètres du calcul effectué.

TABLE 25: Paramètres de calcul

Paramètre	Valeur
Etat plateforme	En mouvement
Début	UTC 08h 57min 20sec
Fin	UTC 08h 58min 30sec
Nombre d'époques	70
Position approchée	Positionnement absolu sur le code
Gestion des sauts de cycles	Elimination des satellites problématiques G05 et G25
Masque	15° (élimination du satellite G20)
Quaternions approchés	Repère parallèle, 2 époques successives
Estimation flottante	Quaternions libérés, ambiguïtés libérées
Estimation fixe	Quaternions libérés, ambiguïtés fixées

Pour obtenir les valeurs approchées des quaternions, il a été décidé de calculer un repère local parallèle à la trajectoire en utilisant la position approchée sur le code de l'antenne principale de la plateforme sur deux époques successives. L'avantage de cette solution est que la ligne de base entre les deux positions est plus grande et permet d'obtenir des valeurs approchées plus précises. De plus, le calcul est plus rapide puisque l'on utilise qu'un seul récepteur pour déterminer ce repère local.

Dans le calcul, le satellite G31 a été utilisé comme satellite de référence pour le calcul des observations de double-différences. Le calcul des triple-différences a permis de détecter des sauts de cycles pour les satellites G05 et G25. Le choix a été fait d'éliminer complètement ces satellites, de même que le satellite G20 situé trop proche de l'horizon, pour éviter d'avoir des résidus trop importants qui viendraient influencer le résultat final.

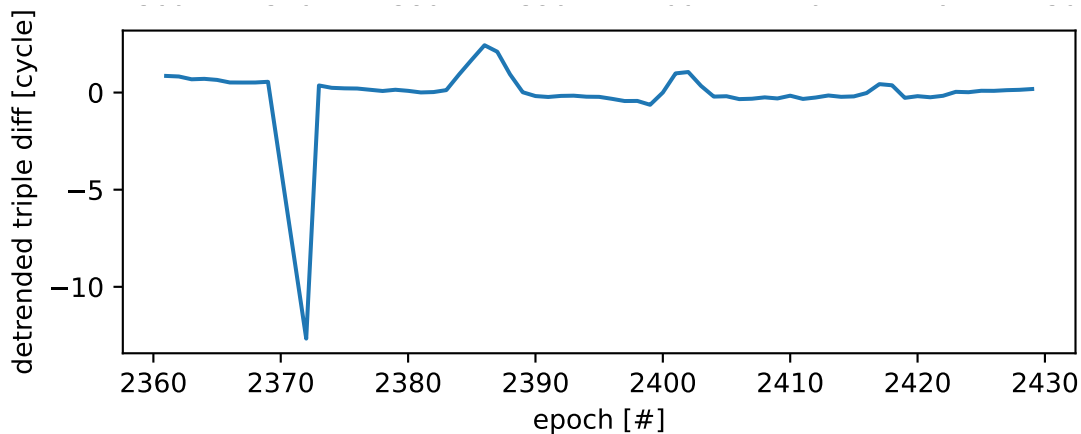


FIGURE 62 – Détection des sauts de cycle à partir des triple-différences (G31-G05)

La figure 62 illustre les triple-différences calculés pour les satellites G31-G05 et on remarque un saut de cycle d'environ -13 à l'époque 2372. Sur le graphique, on aperçoit également trois autres phénomènes, mais il ne s'agit probablement pas de sauts de cycles puisqu'ils sont beaucoup moins marqués. Ces trois bosses apparaissent d'ailleurs lors des changements de direction de la plateforme.

Le tableau 26 présente les principaux résultats du calcul. On constate que les ambiguïtés ont été correctement fixées par l'algorithme LAMBDA puisque le ratio vaut 1. On peut également voir que le quotient d'erreur est très proche de 1, ce qui signifie que l'écart-type théorique de l'unité de poids déterminé a priori correspond bien à l'écart-type empirique calculé a posteriori.

Enfin, l'analyse la plus intéressante est de voir que les angles ont été déterminés avec une précision de 0.124° pour $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et de 0.365° pour $p_{\text{body}}^{\text{topo}}$ et $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$. Cela signifie qu'il est possible de déterminer des angles avec une précision de moins de 1° en utilisant directement les observations GNSS brutes, sans passer par un calcul de lignes de base et un calcul de Helmert 3D.

TABLE 26: Résultats calcul

Paramètre	Valeur
Nb itérations (ambiguïtés flottantes)	11
Ratio LAMBDA	1
Nb itérations (ambiguïtés fixées)	8
Nb observations	828
Nb inconnues	288
Nb conditions	81
Surabondance	621
σ_0 [m]	0.004
s_0 [m]	0.0042
Quotient d'erreur moyenne	1.04
σ_{yaw} [°]	0.124 ± 0.01244
σ_{pitch} [°]	0.365 ± 0.00895
σ_{roll} [°]	0.365 ± 0.03125

On peut également observer graphiquement les résultats des angles estimés.

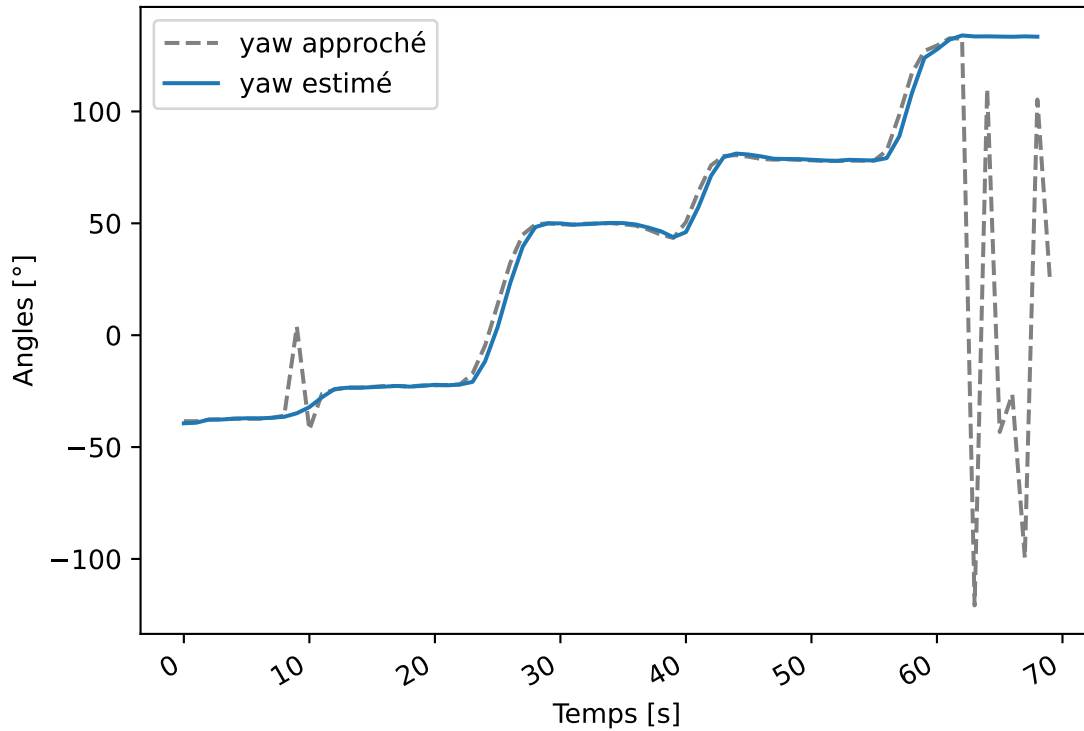


FIGURE 63 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

Sur la figure 63, on distingue assez clairement 3 paliers. Si l'on compare ces paliers avec la trajectoire du véhicule, on voit effectivement trois changements de direction. Les paliers correspondent à un tronçon rectiligne de la trajectoire. On remarque que la méthode choisie pour déterminer les quaternions approchés est très efficace si la plateforme se déplace. En effet, les angles approchés sont très proches des angles estimés. Toutefois, lorsque la plateforme est à l'arrêt (à partir de l'époque 60), les inconnues approchées sont complètement aléatoires, ce qui s'explique par le fait que la ligne de base entre deux époques successives est quasiment nulle.

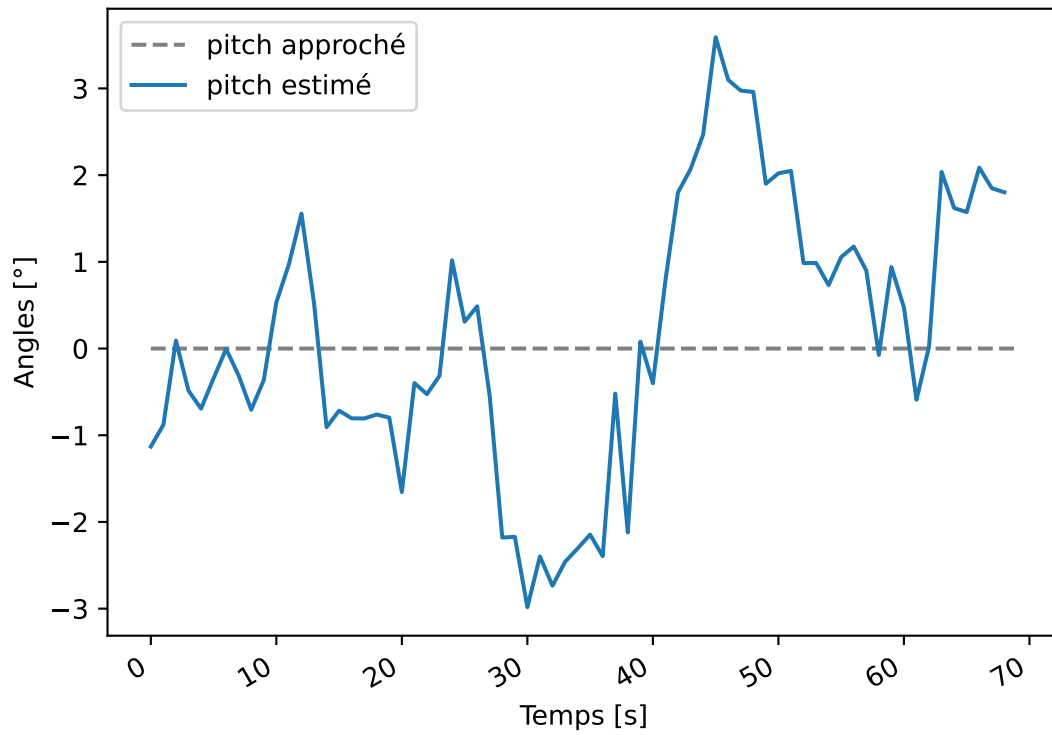


FIGURE 64 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

Sur la figure 64, on constate que la valeur approchée est nulle. En effet, le repère parallèle à la trajectoire est défini de telle sorte à ne pas avoir de rotation autour de l'axe y de la plateforme. Puisque les angles de p_{body}^{topo} sont assez proches de 0° , cela ne pose pas de problème lors du calcul.

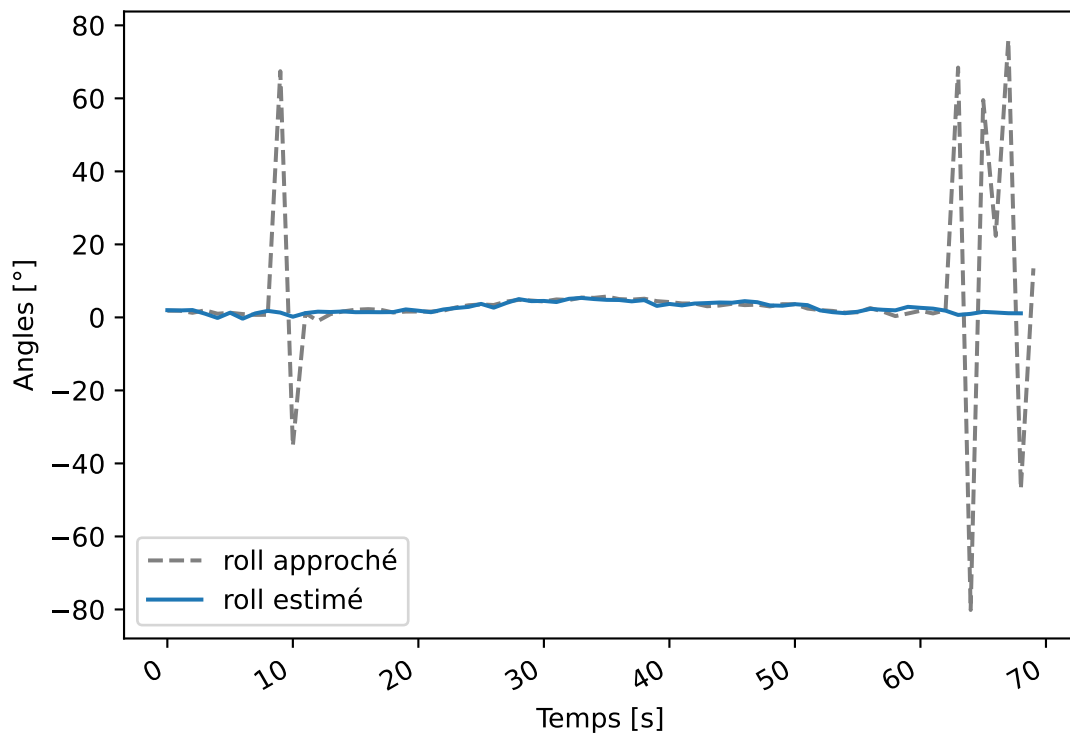


FIGURE 65 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

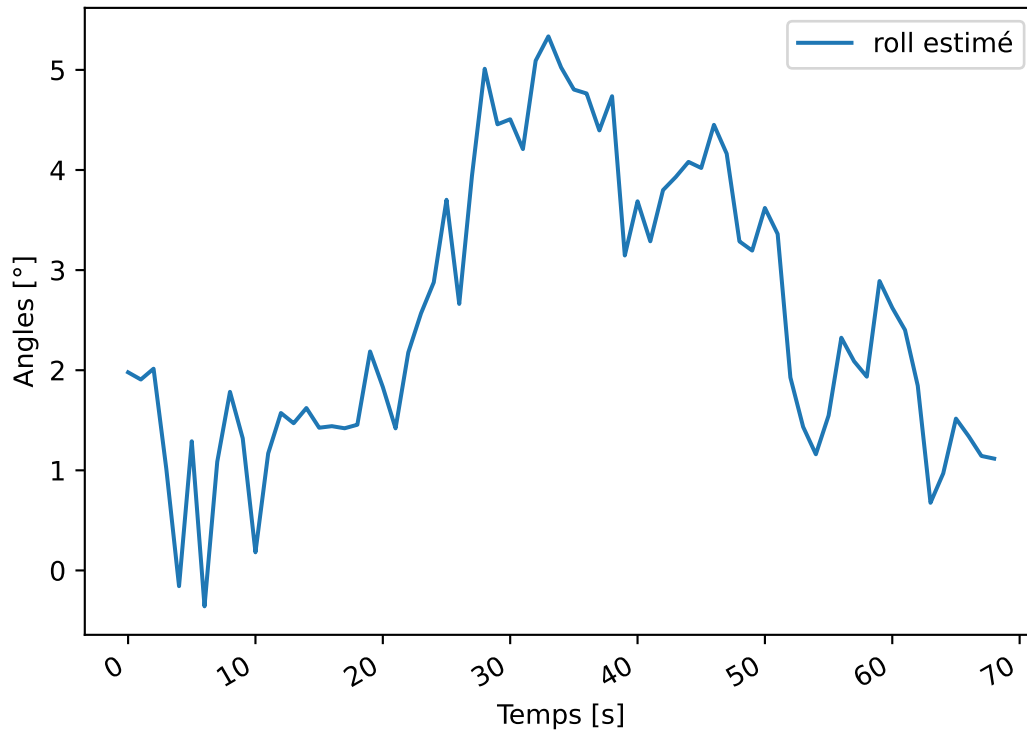


FIGURE 66 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

Les figures 65 et 66 présentent les résultats du calcul des angles $r_{\text{body}}^{\text{topo}}$ autour de l'axe x de la plateforme. Comme pour les angles $y_{\text{body}}^{\text{topo}}$, on remarque que les valeurs approchées sont assez proches des valeurs estimées lorsque la plateforme est en mouvement, mais sont très aléatoires lorsque la plateforme est à l'arrêt.

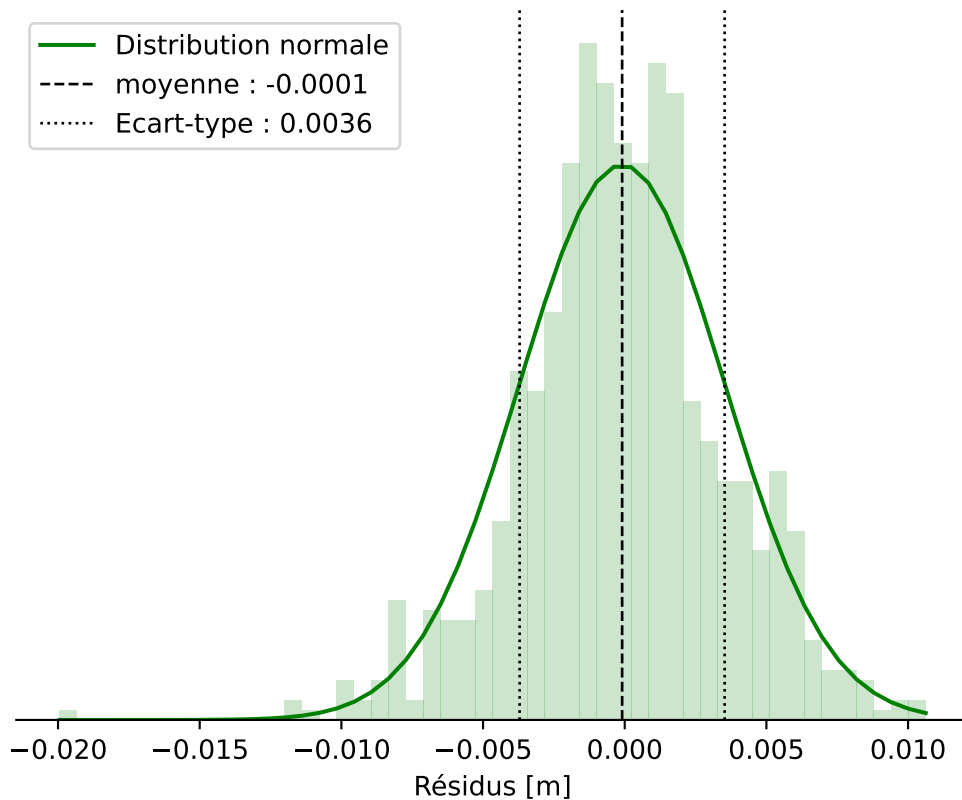


FIGURE 67 – Résidus

En analysant les résidus sur les observations de double-différences de phase, présentés sur la figure 67, on remarque que l'écart-type (0.0036) correspond effectivement au bruit de mesure (0.004 m). On voit également

que la distribution des résidus suit une distribution normale (courbe de Gauss). L'écart-type des résidus est d'ailleurs plus faible que dans le test précédent.

19.4.2 Comparaison des résultats

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus par le calcul de détermination directe d'attitude GNSS avec les valeurs issues de la centrale inertielle et avec celles issues d'un calcul de moving-baseline et d'Helmert 3D. Pour ce test, on remarque que les angles déterminés par le calcul de Helmert 3D à partir de lignes de base cinématiques ont l'air d'être faux comme on peut le voir sur les figures 68, 69 et 71. Il est probable qu'un problème soit survenu lors du calcul de ces lignes de base.

Toutefois, en observant les figures 68, 70 et 72, on voit que les angles GNSS et les angles issus de la centrale inertielle correspondent bien et mènent à des résultats similaires, avec moins de 2° d'écarts entre les deux déterminations. On remarque d'ailleurs qu'il n'y a quasiment pas de dérive dans les mesures de la centrale inertielle. Cela s'explique par le fait que la centrale inertielle a subi des accélérations en raison du déplacement de la voiture, ce qui a permis de lutter contre la dérive.

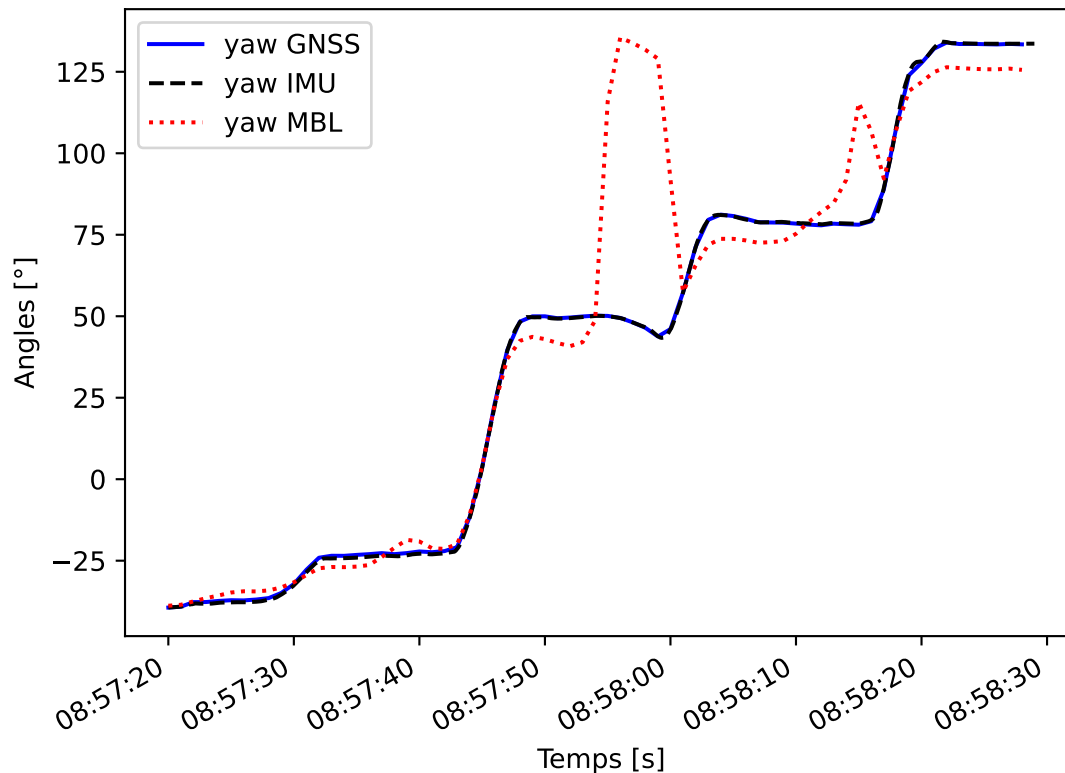


FIGURE 68 – Attitude - angle yaw (autour de l'axe z)

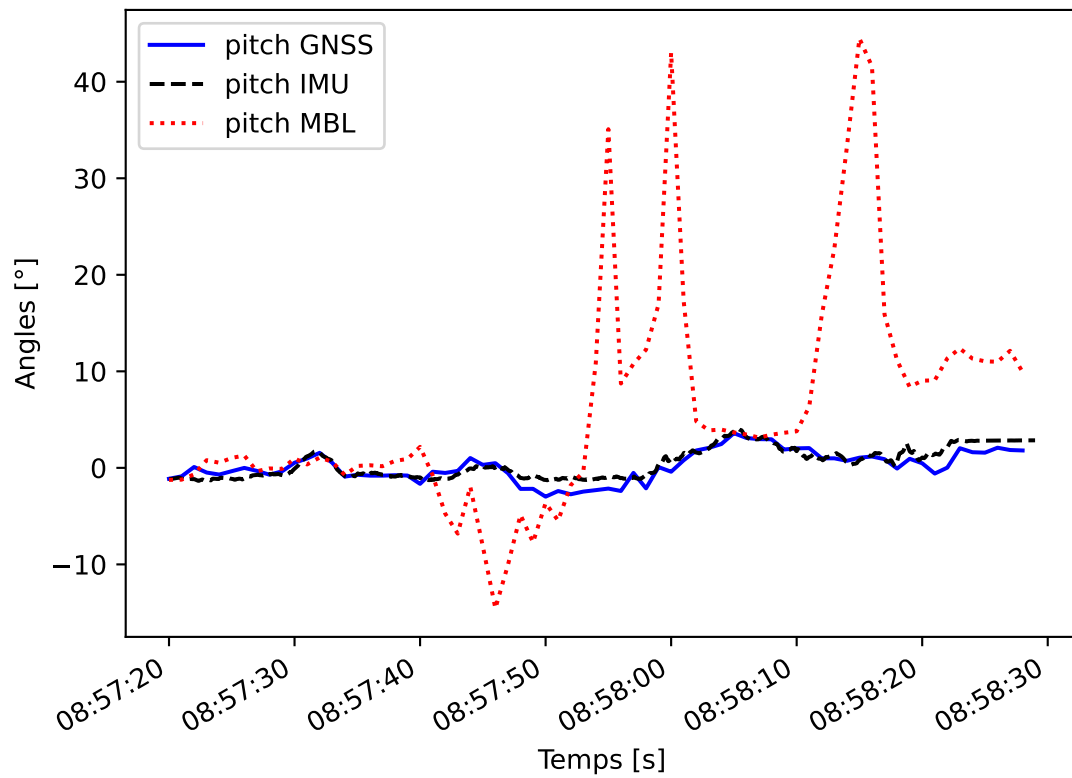


FIGURE 69 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

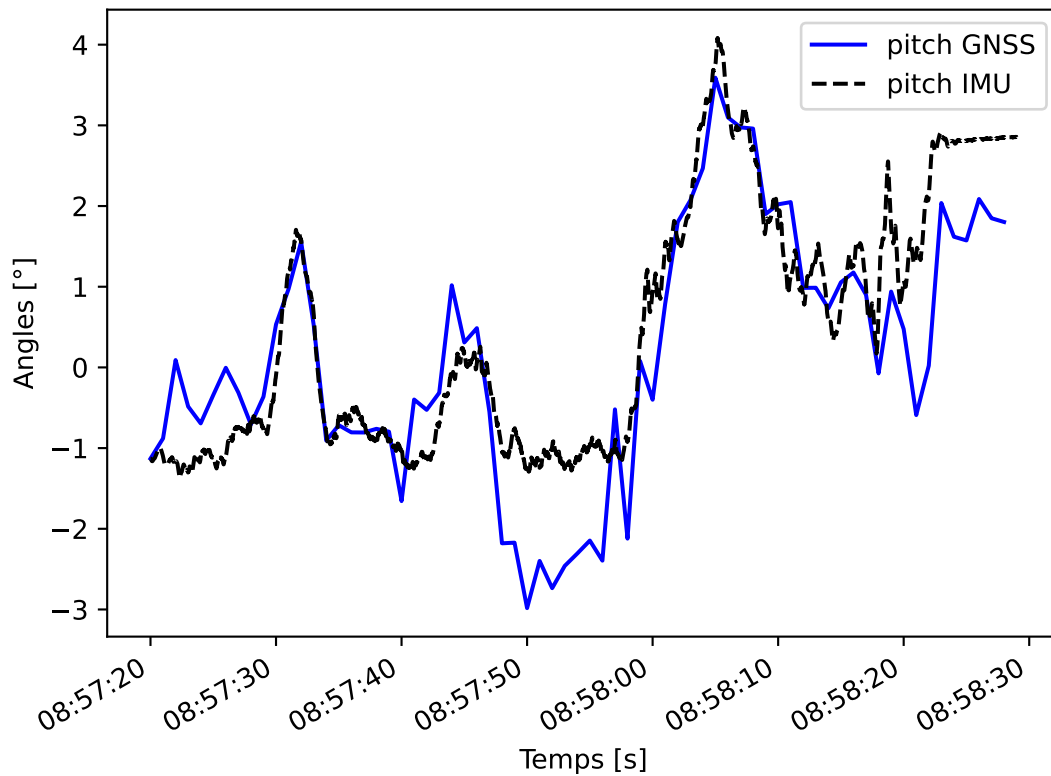


FIGURE 70 – Attitude - angle pitch (autour de l'axe y)

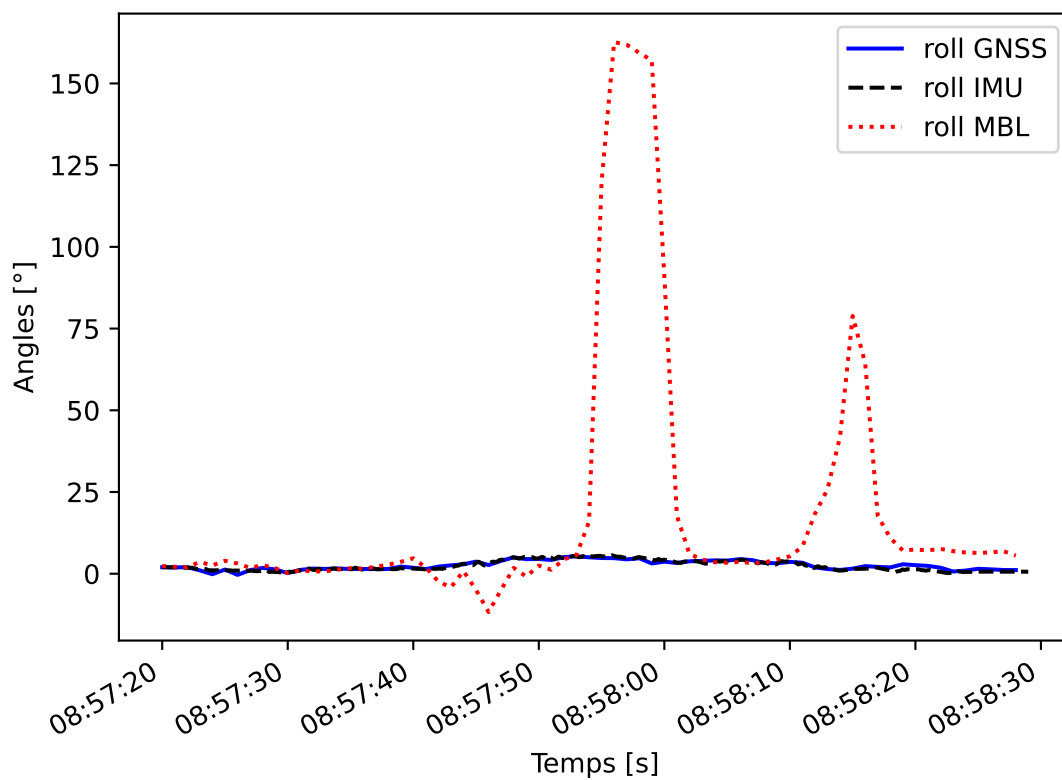


FIGURE 71 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

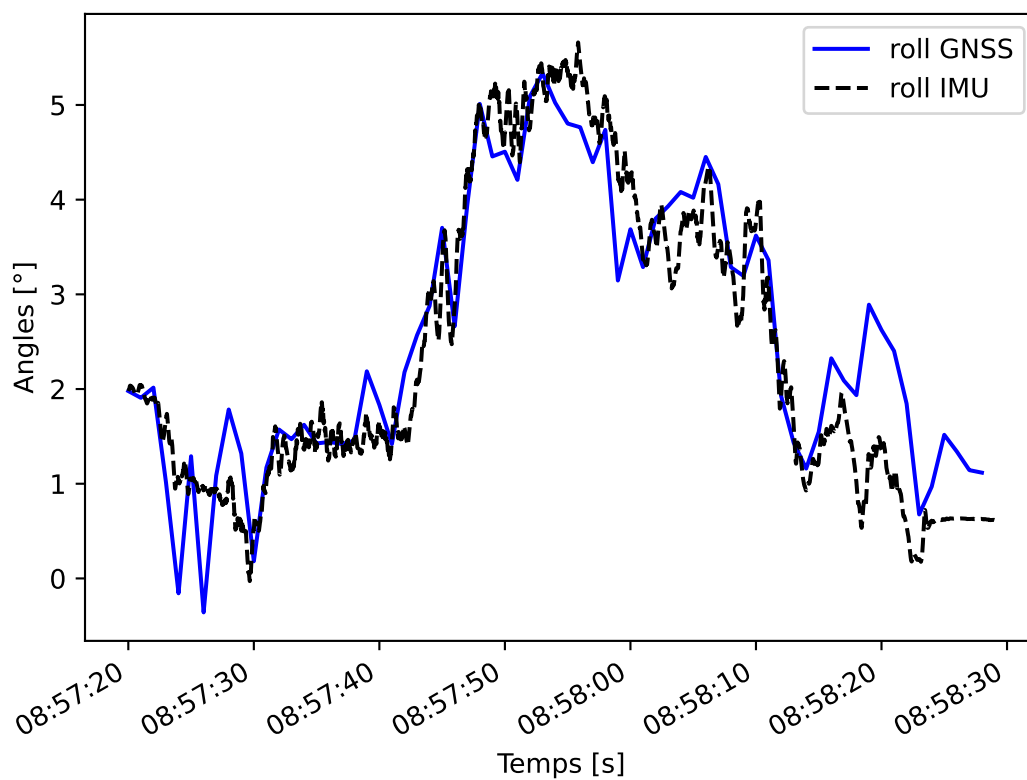


FIGURE 72 – Attitude - angle roll (autour de l'axe x)

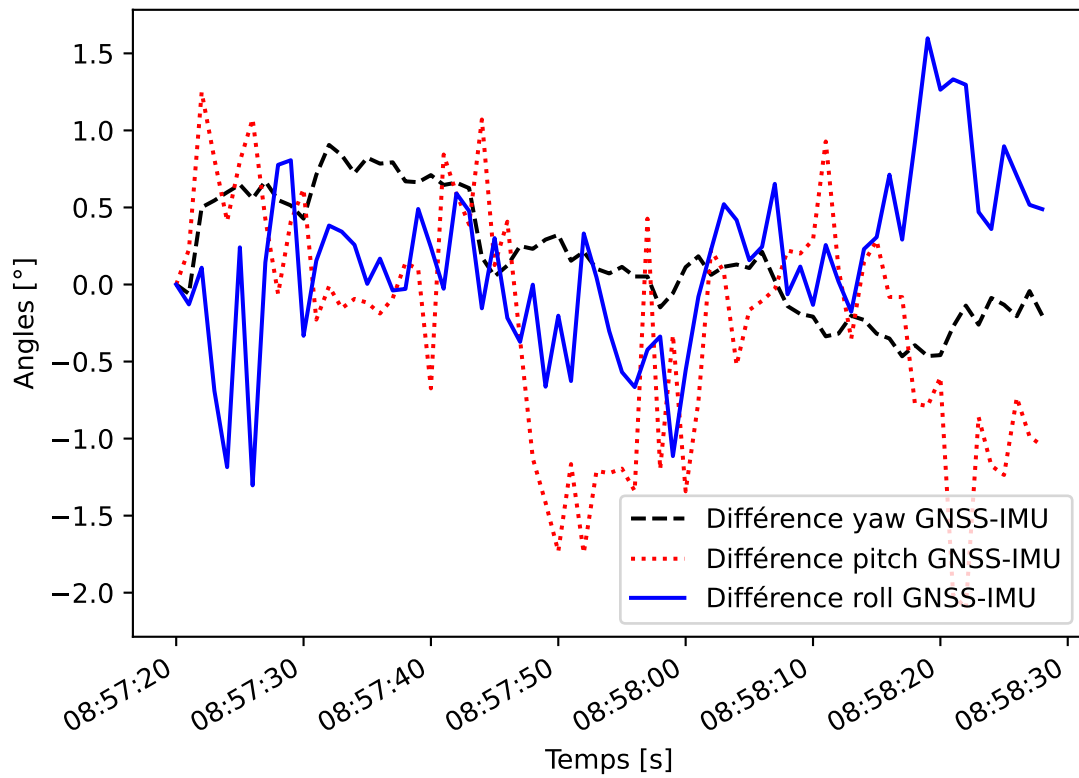


FIGURE 73 – Différences GNSS - IMU

La figure 73 montre les différences angulaires entre la détermination par GNSS et les angles issus de la centrale inertielle. On voit que les écarts sont proches de 0° et ne dépassent pas 2° . On peut ainsi affirmer que la détermination directe d'attitude par GNSS offre des résultats tout-à-fait satisfaisants.

20 Conclusion et perspectives

Si les objectifs de ce projet ont été relativement ambitieux, le travail en a valu la peine, puisque les résultats sont tout-à-fait satisfaisants. Pour atteindre ces objectifs, il a d'abord fallu se familiariser avec les notions de base du GNSS, qui est un sujet extrêmement vaste.

Un simulateur de trajectoire a été développé et permet à l'utilisateur de créer une trajectoire en fonction des accélérations de la plateforme le long du parcours. A partir de cette trajectoire, on peut modéliser l'attitude de la plateforme au moyen d'une matrice de rotation entre le système body et le système topo afin de calculer la position de chaque récepteur à chaque époque.

A partir de là, il a été possible de jouer avec les connaissances théoriques pour générer des fichiers d'observations GNSS au format RINEX avec la possibilité de simuler du bruit, des ambiguïtés de phase et des sauts de cycle. Le fait d'avoir un simulateur capable de produire ce type de données permet d'avoir un outil performant pour développer des algorithmes sans nécessairement devoir effectuer des mesures sur le terrain. De plus, on peut facilement tester plusieurs configurations différentes en ajoutant des antennes ou en modifiant leur position dans le système de la plateforme.

Le deuxième point essentiel au centre de ce projet a été la détermination de l'orientation 3D d'une plateforme. Le choix a été fait de développer un logiciel de post-traitement qui calcule les angles d'attitude en effectuant un seul calcul englobant toutes les observations de toutes les époques, en utilisant le modèle de Gauss-Markov avec contraintes. Les résultats ont démontré qu'un calcul d'attitude est possible en utilisant directement les observations GNSS brutes, sans devoir passer par des logiciels propriétaires souvent très coûteux. Que ce soit avec des données simulées ou avec des données réelles, la détermination des angles d'attitude est possible avec une précision inférieure à 1° et sans passer par un calcul intermédiaire de lignes de base cinématiques et de Helmert 3D.

Les résultats obtenus avec des données réelles ont pu être confrontés avec des données indépendantes issues de la centrale inertielle et d'un calcul indépendant de lignes de base cinématiques, ce qui a permis de valider la cohérence des résultats obtenus. Malgré une détermination des inconnues approchées via un calcul de Helmert 3D en utilisant le positionnement sur le code des antennes de la plateforme, les résultats sont très proches des angles obtenus avec les méthodes indépendantes.

Si la plateforme est en mouvement, les inconnues approchées des quaternions peuvent être déterminées via un repère local parallèle à la plateforme en utilisant la position d'un seul récepteur sur deux époques successives, ce qui crée une ligne de base relativement longue et permet de déterminer des inconnues approchées assez proches des valeurs estimées. Cependant, en déterminant les inconnues approchées des quaternions via un calcul de Helmert 3D, on peut utiliser les observations de toutes les antennes, que la plateforme soit en mouvement ou non. Toutefois, si l'on utilise les positions absolues sur le code pour réaliser ce calcul, on risque de trouver des quaternions approchés assez éloignés de la valeur vraie, ce qui augmente le nombre d'itérations dans le calcul d'ajustement par les moindres carrés.

20.1 Améliorations possibles

Même si les objectifs du cahier des charges sont atteints, les résultats de ce travail ouvrent la voie à de futures améliorations que l'on peut citer ci-dessous.

- Simulateur de trajectoire 3D : Le simulateur de trajectoire a été créé pour construire des trajectoires en deux dimensions, sans composante altimétrique. La trajectoire a ainsi une altitude constante tout au long du parcours. On pourrait imaginer l'ajout d'un modèle numérique de terrain qui permettrait de saisir des coordonnées directement en trois dimensions pour chaque point de la trajectoire saisie par l'utilisateur.
- Initialisation des inconnues approchées :
Le repère parallèle à la trajectoire, utilisé pour estimer l'orientation approchée de la plateforme implique de n'avoir que deux degrés de liberté pour les angle d'attitude, puisque l'angle autour de l'axe y de la plateforme est toujours nul. Pour ajouter un troisième degré de liberté, il faudrait utiliser un repère de Frenet, qui permet une torsion également autour de l'axe y (Guillaume, 2015). Toutefois, la détermination de quaternions approchés via un calcul de Helmert 3D offre également de bons résultats.
La détermination de l'orientation approchée se fait en utilisant uniquement des positions absolues sur le code. Il serait peut-être préférable d'utiliser des observations différentielles afin d'obtenir des valeurs approchées moins bruitées. Comme il s'agit d'un calcul en post-traitement, on pourrait également utiliser les orbites précises des satellites au lieu d'utiliser les éphémérides diffusées.

- Gestion des sauts de cycles :
Comme mentionné dans les tests réels, les sauts de cycles sont détectés, mais ne sont pas pris en compte dans le calcul. Il faudrait étudier la gestion des sauts de cycle pour améliorer leur prise en compte dans le calcul d'ajustement par moindres carrés, pour éviter de devoir désactiver l'ensemble des observations liées au satellite qui présente un saut de cycle.

- Utilisation de plusieurs fréquences différentes et ajout d'autres constellations :
Le résultat de ce travail est un calcul d'attitude mono-fréquence, qui utilise uniquement le signal GPS L1. On pourrait imaginer l'implémentation d'autres fréquences dans le calcul, ce qui augmenterait le nombre d'observations disponibles pour la détermination de l'attitude de la plateforme.
Pour l'instant, le logiciel travaille uniquement avec des satellites GPS. Toutefois, les constellations GLO-NASS et Galileo pourraient également être prises en compte, ce qui permettrait également d'augmenter le nombre d'observations. Le système Galileo utilise les mêmes formules que le système GPS, mais il faudrait s'assurer que les deux systèmes soient synchronisés dans le temps. Pour GLONASS, le calcul d'orbites est différent et un peu plus complexe puisque les éphémérides ne fournissent pas d'éléments de Kepler.

- Implémentation d'un système low-cost :
Comme les récepteurs utilisés sont des récepteurs géodésiques, ils sont parfaitement synchronisés entre eux. Cependant, une utilisation de récepteurs GNSS low-cost impliquerait un calcul de synchronisation des récepteurs. En effet, pour que le calcul d'attitude fonctionne correctement, il faut que les observations de chaque récepteur soit parfaitement synchronisées dans le temps, afin de pouvoir en déduire des angles à une époque commune à tous les récepteurs et bien définie.

- Détermination de l'attitude via une estimation séquentielle et ajout d'un filtre de Kalman :
Un calcul en post-traitement qui utilise toutes les observations dans un seul bloc de calcul permet de déterminer toutes les inconnues dans le même calcul. Les quaternions approchés aident à la résolution des ambiguïtés et les ambiguïtés fixées permettent de trouver plus facilement les quaternions qui forment la matrice de rotation entre le système body et le système topo.
Cependant, le principe d'une estimation séquentielle est de réaliser le calcul d'ajustement par moindres carrés en plusieurs étapes successives. Cela permet de découper le problème et d'ajouter successivement les époques au calcul. L'avantage de cette méthode est d'avoir un calcul beaucoup plus rapide puisqu'il y a moins d'inconnues à estimer à la fois. Ainsi, les ambiguïtés seraient estimées dans les premières époques du calcul. Pour les époques suivantes, seules les inconnues des quaternions devraient être estimées, ce qui simplifie le calcul et diminue son temps de calcul.

Dans le cas d'un calcul en temps réel, l'utilisation d'un filtre de Kalman serait utile pour prédire l'état de la plateforme à l'époque suivante, en combinant directement les mesures de la centrale inertielle avec les observations GNSS. Toutefois, le calcul en temps réel sort largement du cadre de ce projet.

Références

- Bauer, M. (2017). *Vermessung und Ortung mit Satelliten*. Wichmann.
- Guillaume, S. (2015). *Determination of a Precise Gravity Field for the CLIC Feasibility Studies*. PhD thesis.
- Guillaume, S. (2021). *Eléments de géodésie*. HEIG-VD.
- Guillaume, S. (2022a). *Introduction au gnss*. HEIG-VD.
- Guillaume, S. (2022b). *Méthodes d'estimation et réseaux géodésiques*. HEIG-VD.
- Herrero Mártil, R. (2022). *GNSS Interferometric Techniques for Attitude Determination*.
- Hexagon (2022). *GrafNav GNSS Post-Processing Software*, <https://novatel.com/products/waypoint-post-processing-software/grafnav>.
- IGS (2013). *Rinex - the receiver independent exchange format - version 3.02*.
- J. Sanz Subirana, J. J. Z. and Hernández-Pajares, M. (2011a). *Klobuchar ionospheric model*.
- J. Sanz Subirana, J. J. Z. and Hernández-Pajares, M. (2011b). *Nequick ionospheric model*.
- J. Sanz Subirana, J. J. Z. and Hernández-Pajares, M. (2011c). *Time references in gnss*.
- Leica Geosystems AG - Part of Hexagon (2022). *Logiciel de topographie Leica Infinity*, <https://leica-geosystems.com/fr-ch/products/gnss-systems/software/leica-infinity>.
- Spyder IDE (2021). *Spyder, The Scientific Python Development Environment*, <https://www.spyder-ide.org/>.
- Takasu, T. (2007-2013). *RTKLIB : An Open Source Program Package for GNSS Positioning*, <http://rtklib.com/>.
- Teunissen (2022). *LAMBDA*, <https://github.com/kawaiyoo/lambda>.
- Teunissen, P. and Montenbruck, O. (2017). *Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems*. Springer International Publishing, Cham, Germany.
- Willi, D. (2019). *GNSS receiver synchronisation and antenna calibration*. PhD thesis, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- xsens (2022). *xsens - Download MT Software Suite 2021.4*, <https://content.xsens.com/mt-software-suite-download?hsctatracking=e7ef7e11-db88-4d9e-b36e-3f937ea4ae15>